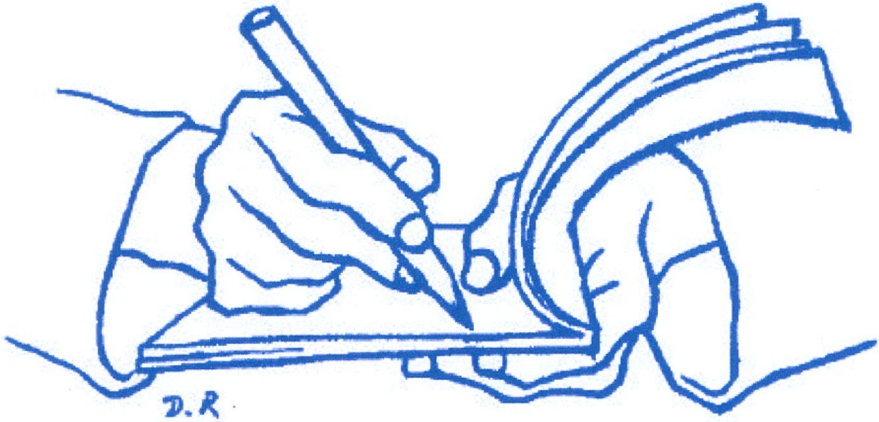
Educación



para todos

Educación para todos no es un proyecto lucrativo, sino un esfuerzo colectivo de estudiantes y profesores de la UNAM para facilitar el acceso a los materiales necesarios para la educación de la mayor cantidad de gente posible. Pensamos editar en formato digital libros que por su alto costo, o bien porque ya no se consiguen en bibliotecas y librerías, no son accesibles para todos.

Invitamos a todos los interesados en participar en este proyecto a sugerir títulos, a prestarnos los textos para su digitalización y a ayudarnos en toda la labor técnica que implica su reproducción. El nuestro, es un proyecto colectivo abierto a la participación de cualquier persona y todas las colaboraciones son bienvenidas.

Nos encuentras en los Talleres Estudiantiles de la Facultad de Ciencias y puedes ponerte en contacto con nosotros a la siguiente dirección de correo electrónico:

eduktodos@hotmail.com http://eduktodos.dyndns.org

Michael Spivak
Universidad de Brandeis

Cálculo en variedades

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México

TÍTULO DE LA OBRA ORIGINAL

CALCULUS ON MANIFOLDS

EDITADA POR

W. A. Benjamin, Inc., Nueva York,

VERSIÓN ESPAÑOLA POR

D.ª Griselda Pascual Xufré

Catedrático del Instituto «Maragall»
Profesor de la Facultad de Ciencias
de Barcelona

REVISADA POR EL

Dr. D. Enrique Linés Escardó

Catedrático de la Facultad de Ciencias
de Barcelona

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Encarnación 86
08024 Barcelona

Reservados todos los derechos. Ninguna parte del material cubierto por este título de propiedad literaria puede ser reproducida, almacenada en un sistema de informática o transmitida de cualquier forma o por cualquier medio electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros métodos sin el previo y expreso permiso por escrito del editor.

Edición en español
© **Editorial Reverté, S. A., 1988**
Impreso en España Printed in Spain

ISBN: 84-291-5142-7

Depósito Legal: B-38580 - 1988

Impreso por GERSA, Industria Gráfica
Tambor del Bruc, 6 - 08970 Sant Joan Despí (Barcelona)

Prólogo

Las Matemáticas se han extendido en todas direcciones a una velocidad fabulosa durante los últimos cincuenta años. Han aparecido nuevos campos de interés, su difusión en otras disciplinas ha sido rápida y nuestro conocimiento de las ramas clásicas ha crecido en profundidad. Al mismo tiempo, una de las tendencias más sorprendentes de las nuevas Matemáticas es el incremento constante de interrelaciones entre sus diversas ramas. Por ello, los estudiantes de Matemáticas de hoy día han de enfrentarse a una inmensa montaña de material. En adición a las partes tradicionales de la Matemática presentadas a la manera tradicional —y exposiciones de esta clase abundan—, existen caminos nuevos, con frecuencia iluminadores, de considerar aquellas partes tradicionales, a la vez que los nuevos y vastos campos de interés, llenos de potencialidad matemática. Mucho de este nuevo material está desperdigado en las revistas de investigación y escrito en forma no fácilmente asimilable, y frecuentemente sólo organizado de manera coherente en las mentes de activos matemáticos o en notas no publicadas. Una serie de breves libros monográficos, a la que pertenece este trabajo, ha sido concebida como medio posible de atacar y, posiblemente, aliviar alguno de estos problemas pedagógicos. Estos libros han sido escritos por matemáticos, activos investigadores, que pueden contemplar los últimos desarrollos, y que pueden usarlos para clasificar y condensar la materia que se ha de exponer. Ellos conocen cuáles son las ideas que han de subrayar y cuáles las técnicas que han de destacar. Esperamos que esta serie sirva para presentar a los estudiantes ya introducidos en la Matemática las áreas contemporáneas de investigación y los problemas modernos, y creemos que el estilo, libre de formulismos, en que están escritos estos libros, permitirá que los gustos personales y las actitudes de las primeras figuras de la Matemática moderna resplandezcan claramente ante los lectores.

El campo de la Geometría Diferencial es uno de aquellos en que los modernos desarrollos han efectuado grandes cambios. La parte de la Geometría Diferencial, centrada alrededor del teorema de Stokes, algunas veces llamado teorema fundamental del Cálculo de varias variables, es enseñado tradicionalmente en los cursos de Cálculo superior, y es esencial, tanto en Ingeniería y Física como en otras muchas ramas importantes de la Matemática. Sin embargo, la enseñanza de esta materia ha quedado relativamente poco afectada por los desarrollos modernos, por lo que los matemáticos han de reaprender estas cuestiones posteriormente y otros científicos quedan con frecuencia privados de tal estudio. El libro del Dr. Spivak ha de servir para ayudar a aquellos que deseen ver el teorema de Stokes como lo ven los investigadores matemáticos actuales. Un estudiante con una preparación de un buen curso de Cálculo y Álgebra lineal, encontrará este libro perfectamente asequible.

Robert Gunning
Hugo Rossi

Princeton, New Jersey
Waltham, Massachusetts
Agosto, 1965

Prefacio

Este librito se ocupa esencialmente de aquellas partes del «Cálculo» en las que la sutileza de los conceptos y los métodos hace difícil alcanzar el rigor necesario en un nivel elemental. En la vía que se sigue se hace uso de versiones elementales de métodos modernos propios de la Matemática actual. Los prerrequisitos formales consisten simplemente en algunos conceptos del Álgebra lineal, cierta familiaridad con la notación de la Teoría de conjuntos, y un primer curso de Cálculo estudiado a fondo (en el cual se habrá tratado del extremo superior o supremo, y del extremo inferior o ínfimo, en un conjunto de números reales). Además, es esencial una cierta relación, tal vez latente, con la Matemática abstracta.

La primera mitad del libro se ocupa de la parte simple del Cálculo superior que generaliza a otras dimensiones el Cálculo elemental. El capítulo I contiene los preliminares, y los capítulos II y III se ocupan de Diferenciación e Integración.

El resto del libro está dedicado al estudio de curvas, superficies y objetos análogos de dimensiones superiores. Aquí los métodos clásicos y los modernos siguen diferentes caminos; naturalmente que existen muchos puntos de contacto, y un encuentro muy significativo tiene lugar en la última sección. Una de las fórmulas más clásicas del Cálculo Integral aparece como último teorema del libro. Este teorema, el de Stokes, ha tenido una historia curiosa, experimentando una sorprendente metamorfosis.

La primera formulación del teorema aparece como postdata de una carta, fechada el 2 de julio de 1850, de Sir William Thomson (Lord Kelvin) a Stokes. Posteriormente fue publicada como la cuestión número ocho en el examen para el premio Smith en el año 1854. Esta competición que se realizaba anualmente entre los mejores estudiantes de la Universidad de Cambridge fue establecida

desde 1849 a 1882 por el profesor Stokes; y cuando murió, el resultado citado fue denominado teorema de Stokes. Sus contemporáneos dieron por lo menos tres demostraciones del teorema: Thomson publicó una, otra apareció en el *Treatise on Natural Philosophy*, de Thomson y Tait y Maxwell dio otra en *Electricity and Magnetism* [13]. Puesto que hoy día el nombre de Stokes se ha aplicado a resultados mucho más generales, los cuales han figurado de manera prominente en el desarrollo de ciertas partes de la Matemática, el teorema de Stokes puede ser considerado como un ejemplo del valor de la generalización.

En este libro se dan tres formas del teorema de Stokes. La versión conocida por Stokes aparece en la última sección junto con sus inseparables compañeros, el teorema de Green y el de la divergencia. Estos tres teoremas, los clásicos del subtítulo del libro, se deducen fácilmente del teorema moderno de Stokes que aparece antes en el capítulo V. Lo que el teorema clásico afirma respecto de las curvas y superficies, este teorema lo afirma respecto de los objetos análogos de dimensión superior (variedades), los cuales son estudiados completamente en la primera parte del capítulo V. Este estudio de las variedades que puede ser justificado únicamente por su importancia en la Matemática moderna, no requiere mayor esfuerzo que el necesario para un estudio cuidadoso sólo de las curvas y superficies. El lector probablemente sospechará que el teorema moderno de Stokes es por lo menos tan difícil como el teorema clásico deducido de él. Por el contrario, aquél es una simple consecuencia de otra versión del teorema de Stokes. Esta versión abstracta es el objetivo y principal resultado del capítulo IV. Es muy razonable suponer que las dificultades tan largamente evitadas se presentarán aquí. Sin embargo, la demostración de este teorema es, en sentido matemático, una total trivialidad, pues se trata de realizar un cálculo. Por otra parte, el enunciado de esta trivialidad no puede ser entendido sin un enjambre de difíciles definiciones que se dan en el capítulo IV. Existen buenas razones por las que el teorema se presenta sencillo, mientras que las definiciones, difíciles. Como revela la evolución del teorema de Stokes, un sólo principio simple puede aparecer con el aspecto de muchos resultados difíciles; las demostraciones de muchos teoremas se reducen simplemente a despojarlas de su disfraz. Las definiciones, por otra parte, sirven para un doble propósito: se trata de sustituciones rigurosas de nociones vagas, y también del mecanismo necesario para demostraciones elegantes. En las dos primeras secciones del capítulo IV se definen de manera precisa, y se demuestran, las reglas de manipulación de lo que clásicamente se describía como «expresiones de la forma» $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, o $P\,dx\,dy + Q\,dy\,dz + R\,dz\,dx$. Las cadenas definidas en la tercera sección y las particiones de la unidad introducidas en el capítulo III, libran a nuestras demostraciones de la necesidad de seccionar a las variedades en pequeños trozos, que reducen las cuestiones sobre variedades en donde todas las cosas parecen difíciles, a cuestiones referentes al espacio euclídeo, donde todo es fácil.

Concentrar toda la profundidad de una teoría en las definiciones es innega-

blemente económico, pero está ligado a originar algunas dificultades al estudiante. Espero que el lector se animará a estudiar el capítulo de manera total, con la seguridad de que los resultados justificarán el esfuerzo: los teoremas clásicos de la última sección representan solamente algunas, y no se quieren indicar las más importantes, aplicaciones del capítulo IV; otras aparecen como problemas, y ulteriores desarrollos se encontrarán consultando la bibliografía.

Sobre los problemas y la bibliografía se han de decir algunas palabras. Los problemas se presentan después de cada sección y están numerados —lo mismo que los teoremas— con la numeración de los capítulos. Se ha puesto un asterisco en aquellos problemas cuyos resultados serán usados en el texto, pero esta precaución debe ser innecesaria, ya que los problemas representan la parte más importante del libro y el lector debe por lo menos fijar la atención en todos ellos. Habría sido necesario hacer la bibliografía, o muy incompleta, o inmanejable, puesto que muchas de las ramas de la Matemática podrían ser recomendadas legítimamente como materias en las que se continúa lo expuesto en el libro. En esta disyuntiva, se ha presentado una bibliografía incompleta pero sugestiva.

Muchas observaciones críticas y sugestiones fueron comunicadas al autor al escribir este libro, el cual está particularmente agradecido a Richard Palais, Hugo Rossi, Robert Seeley y Charles Stenard por sus valiosos y útiles comentarios.

Michael Spivak

Waltham, Massachusetts
Agosto, 1965

Índice analítico

Prólogo , V
Prefacio, VII

1. Funciones en el espacio euclídeo 1

NORMA Y PRODUCTO INTERIOR, 1
SUBCONJUNTOS DEL ESPACIO EUCLÍDEO, 5
FUNCIONES Y CONTINUIDAD, 10

2. Diferenciación 13

DEFINICIONES BÁSICAS, 13
TEOREMAS BÁSICOS, 17
DERIVADAS PARCIALES, 23
DERIVADAS, 28
FUNCIONES INVERSAS, 32
FUNCIONES IMPLÍCITAS, 38
NOTACIÓN, 41

3. Integración 43

DEFINICIONES BÁSICAS, 43
MEDIDA CERO Y CONTENIDO CERO, 46
FUNCIONES INTEGRALES, 49
TEOREMA DE FUBINI, 52
PARTICIONES DE LA UNIDAD, 58
CAMBIO DE VARIABLES, 62

4. Integración en cadenas **69**
PRELIMINARES ALGEBRAICOS, 69
CAMPOS Y FORMAS, 79
PRELIMINARES GEOMÉTRICOS, 89
EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, 93

5. Integración en variedades **101**
VARIEDADES, 101
CAMPOS Y FORMAS EN VARIEDADES, 106
TEOREMA DE STOKES EN VARIEDADES, 113
EL ELEMENTO DE VOLUMEN, 116
LOS TEOREMAS CLÁSICOS, 124

Bibliografía, 129
Índice alfabético, 131

1

Funciones en el espacio euclídeo

NORMA Y PRODUCTO INTERIOR

El n-espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$ o espacio euclídeo **n dimensional,** se define como el conjunto de todas las n-plas $(x^1, \ldots, x^n)$ de números reales x^i (una «1-pla de números» es un solo número y $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$, el conjunto de todos los números reales). Un elemento de $\mathbf{R}^n$ se denomina frecuentemente un punto en $\mathbf{R}^n$, y $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ se denominan la recta, el plano y el espacio respectivamente. Si x designa un elemento de $\mathbf{R}^n$, x es entonces una n-pla o conjunto ordenado de n de números, en el cual se indica por x^i el que ocupa el lugar i; se puede, pues, escribir

$$x = (x^1, \ldots, x^n).$$

Un punto en $\mathbf{R}^n$ se denomina también frecuentemente vector en $\mathbf{R}^n$, pues $\mathbf{R}^n$, con las operaciones $x + y = (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n)$ y $ax = (ax^1, \ldots, ax^n)$ *es* un espacio vectorial (sobre los números reales, de dimensión n). En este espacio vectorial se da la noción de longitud de un vector x, que se acostumbra a llamar **norma** $|x|$ de x y se define por $|x| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}$. Si $n = 1$, $|x|$ es el conocido valor absoluto de x. La relación entre la norma y la estructura de espacio vectorial de $\mathbf{R}^n$ es muy importante.

1 - 1 Teorema. *Si* $x, y \in \mathbf{R}^n$ *y* $a \in \mathbf{R}$, *entonces*

(1) $|x| \geq 0$ *y* $|x| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

(2) $|\Sigma_{i=1}^n x^i y^i| \leq |x| \cdot |y|$; *la igualdad tiene lugar si y sólo si* x *e* y *son linealmente dependientes.*

(3) $|x + y| \leq |x| + |y|$.
(4) $|ax| = |a| \cdot |x|$.

Demostración

(1) se deja para el lector.
(2) Si x e y son linealmente dependientes, se verifica evidentemente la igualdad. Si no lo son, entonces $\lambda y - x \neq 0$ para todo $\lambda \in \mathbf{R}$, de manera que

$$0 < |\lambda y - x|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda y^i - x^i)^2$$

$$= \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x^i y^i + \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2.$$

Por tanto el segundo miembro es un trinomio de segundo grado en λ sin raíces reales, y su discriminante ha de ser negativo. Así

$$4 \left(\sum_{i=1}^{n} x^i y^i \right)^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2 < 0.$$

(3) $|x + y|^2 = \Sigma_{i=1}^{n} (x^i + y^i)^2$
$= \Sigma_{i=1}^{n} (x^i)^2 + \Sigma_{i=1}^{n} (y^i)^2 + 2\Sigma_{i=1}^{n} x^i y^i$
$\leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x| \cdot |y|$ según (2)
$= (|x| + |y|)^2$.

(4) $|ax| = \sqrt{\Sigma_{i=1}^{n} (ax^i)^2} = \sqrt{a^2 \Sigma_{i=1}^{n} (x^i)^2} = |a| \cdot |x|$. ∎

La expresión $\Sigma_{i=1}^{n} x^i y^i$ que aparece en (2) se denomina **producto interior** de x e y y se indica por $\langle x,y \rangle$. Las propiedades más importantes del producto interior son las siguientes.

1-2 Teorema. *Si x, x_1, x_2 e y, y_1, y_2 son vectores en $\mathbf{R}^n$ y $a \in \mathbf{R}$, entonces*

(1) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$ *(simetría).*
(2) $\langle ax,y \rangle = \langle x,ay \rangle = a\langle x,y \rangle$ *(bilinealidad).*
$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1,y \rangle + \langle x_2,y \rangle$
$\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x,y_1 \rangle + \langle x,y_2 \rangle$
(3) $\langle x,x \rangle \geq 0$ *y* $\langle x,x \rangle = 0$ *si y sólo si* $= 0$ *(positividad).*

(4) $|x| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

(5) $\langle x,y\rangle = \dfrac{|x+y|^2 - |x-y|^2}{4}$ *(identidad de polarización).*

Demostración

(1) $\langle x,y\rangle = \Sigma_{i=1}^n x^i y^i = \Sigma_{i=1}^n y^i x^i = \langle y,x\rangle$.

(2) En virtud de (1) basta probar

$$\langle ax,y\rangle = a\langle x,y\rangle,$$
$$\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1,y\rangle + \langle x_2,y\rangle.$$

Estas igualdades son consecuencia de las ecuaciones

$$\langle ax,y\rangle = \sum_{i=1}^n (ax^i)y^i = a\sum_{i=1}^n x^i y^i = a\langle x,y\rangle,$$
$$\langle x_1 + x_2, y\rangle = \sum_{i=1}^n (x_1{}^i + x_2{}^i)y^i = \sum_{i=1}^n x_1{}^i y^i + \sum_{i=1}^n x_2{}^i y^i$$
$$= \langle x_1,y\rangle + \langle x_2,y\rangle.$$

(3) y (4) se dejan para el lector.

(5) $\dfrac{|x+y|^2 - |x-y|^2}{4}$

$= \frac{1}{4}[\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle]$ según (4)

$= \frac{1}{4}[\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle - (\langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle)]$

$= \langle x,y\rangle$. ∎

Esta sección termina con algunas observaciones importantes sobre las notaciones. El vector $(0,\ldots,0)$ se suele designar simplemente por 0. La **base usual** de $\mathbf{R}^n$ es $e_1,\ldots,e_n$, donde $e_i = (0,\ldots,1,\ldots,0)$ con el 1 en el lugar i. Si $T:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es una aplicación lineal, la matriz T con respecto a las bases usuales de $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{R}^m$ es la matriz $m \times n$ $A = (a_{ij})$, donde $T(e_i) = \Sigma_{j=1}^n a_{ji}e_j$ — los coeficientes de $T(e_i)$ aparecen en la i-ésima *columna* de la matriz. Si S: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ tiene por matriz $p \times m$ la B, entonces $S \circ T$ tiene por matriz $p \times n$ la BA [aquí $S \circ T(x) = S(T(x))$; la mayoría de los libros de Álgebra lineal para indicar $S \circ T$ escriben simplemente ST]. Para hallar $T(x)$ se calcula la matriz $m \times 1$

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}, & \ldots & ,a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1}, & \ldots & ,a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix};$$

entonces $T(x) = (y^1, \ldots, y^m)$. Un convenio de notación simplifica considerablemente muchas fórmulas: si $x \in \mathbf{R}^n$ e $y \in \mathbf{R}^m$, entonces (x,y) es el vector

$$(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) \in \mathbf{R}^{n+m}.$$

Problemas. **1-1.*** Demostrar que $|x| \leq \sum_{i=1}^n |x^i|$.

1-2. ¿Cuándo tiene lugar la igualdad en el teorema 1-1(3)? *Indicación:* Reconsidérese la demostración; la respuesta no es «cuando x e y son linealmente dependientes».

1-3. Probar que $|x - y| \leq |x| + |y|$. ¿Cuándo se verifica la igualdad?

1-4. Demostrar que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

1-5. El número $|x - y|$ se denomina la **distancia** entre x e y. Demostrar e interpretar geométricamente la «desigualdad triangular»:

$$|z - x| \leq |z - y| + |y - x|.$$

1-6. Sean f y g integrables en $[a,b]$.

(a) Demostrar que $\left|\int_a^b f \cdot g\right| \leq \left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}$. *Indicación:* Considérense por separado los casos $0 = \int_a^b (f - \lambda g)^2$ para algún $\lambda \in \mathbf{R}$ y $0 < \int_a^b (f - \lambda g)^2$ para todo $\lambda \in \mathbf{R}$.

(b) Si se verifica la igualdad, ¿ha de ser $f = \lambda g$ para algún $\lambda \in \mathbf{R}$? ¿Cuál si f y g son continuas?

(c) Mostrar que el teorema 1-1(2) es un caso particular del (a).

1-7. Una aplicación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ se dice que **conserva la norma** si $|Tx| = |x|$, y que **conserva el producto interior** si $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x,y \rangle$.

(a) Probar que T conserva la norma si y sólo si T conserva el producto interior.

(b) Probar que una aplicación lineal de este tipo es 1-1 y que T^{-1} es de la misma naturaleza.

1-8. Si $x,y \in \mathbf{R}^n$ son no nulos, el **ángulo** entre x e y, indicado por $\angle(x,y)$, se define como arccos $(\langle x,y \rangle / |x| \cdot |y|)$, que tiene sentido en virtud del teorema 1-1(2). La aplicación lineal T se dice **que conserva los ángulos** si T es 1-1, y para $x,y \neq 0$ se tiene $\angle(Tx,Ty) = \angle(x,y)$.

(a) Probar que si T conserva la norma, T conserva los ángulos.

(b) Si existe una base $x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbf{R}^n$ y números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que $Tx_i = \lambda_i x_i$ probar que T conserva los ángulos si y sólo si todas las λ_i son iguales.

(c) ¿Cuáles son todas las $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ que conservan los ángulos?

1-9. Si $0 \leq \theta < \pi$, sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ cuya matriz es $\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta, & \cos\theta \\ -\cos\theta, & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$

Probar que T conserva los ángulos, y si $x \neq 0$, entonces $\angle(x,Tx) = \theta$.

1-10.* Si $T : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ es una aplicación lineal, probar que existe un número M tal que $|T(h)| \leq M|h|$ para $h \in \mathbf{R}^m$. *Indicación:* Acótese $|T(h)|$ en función de $|h|$ y de los términos que forman parte de la matriz de T.

1 - 11. Si $x,y \in \mathbf{R}^n$ y $z,w \in \mathbf{R}^m$, probar que $\langle (x,z),(y,w)\rangle = \langle x,y\rangle + \langle z,w\rangle$ y $|(x,z)| = \sqrt{|x|^2 + |z|^2}$. Obsérvese que (x,z) y (y,w) representan puntos en $\mathbf{R}^{n+m}$.

1 - 12.* Sea $(\mathbf{R}^n)^*$ el espacio dual del espacio vectorial $\mathbf{R}^n$. Si $x \in \mathbf{R}^n$, se define $\varphi_x \in (\mathbf{R}^n)^*$ por $\varphi_x(y) = \langle x,y\rangle$. Se define $T : \mathbf{R}^n \to (\mathbf{R}^n)^*$ por $T(x) = \varphi_x$. Probar que T es una aplicación lineal 1 - 1 y concluir que cada $\varphi \in (\mathbf{R}^n)^*$ es un φ_x para un único $x \in \mathbf{R}^n$.

1 - 13.* Si $x,y \in \mathbf{R}^n$, se dice que x e y son **perpendiculares** (u **ortogonales**) si $\langle x,y\rangle = 0$. Si x e y son perpendiculares, probar que $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

SUBCONJUNTOS DEL ESPACIO EUCLÍDEO

El intervalo cerrado $[a,b]$ tiene un análogo natural en $\mathbf{R}^2$. Es el **rectángulo cerrado** $[a,b] \times [c,d]$ definido como el conjunto de todos los pares (x,y) con $x \in [a,b]$ e $y \in [c,d]$. En general, si $A \subset \mathbf{R}^m$ y $B \subset \mathbf{R}^n$, entonces $A \times B \subset \mathbf{R}^{m+n}$ se define como el conjunto de todos los $(x,y) \in \mathbf{R}^{m+n}$ con $x \in A$ e $y \in B$. En particular, $\mathbf{R}^{m+n} = \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$. Si $A \subset \mathbf{R}^m$, $B \subset \mathbf{R}^n$ y $C \subset \mathbf{R}^p$, entonces $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$, y ambos se indican simplemente por $A \times B \times C$; este convenio se extiende al producto de un número cualquiera de conjuntos. El conjunto $[a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n] \subset \mathbf{R}^n$ se denomina **rectángulo cerrado en** $\mathbf{R}^n$, mientras que el conjunto $(a_1,b_1) \times \ldots \times (a_n,b_n) \subset \mathbf{R}^n$ se denomina **rectángulo abierto.** En general, un conjunto $U \subset \mathbf{R}^n$ se denomina **abierto** (Fig. 1-1) si para cada $x \in U$ existe un rectángulo abierto A tal que $x \in A \subset U$.

Un subconjunto C de $\mathbf{R}^n$ es **cerrado** si $\mathbf{R}^n - C$ es abierto. Por ejemplo, si C contiene sólo un número finito de puntos, entonces C es cerrado.

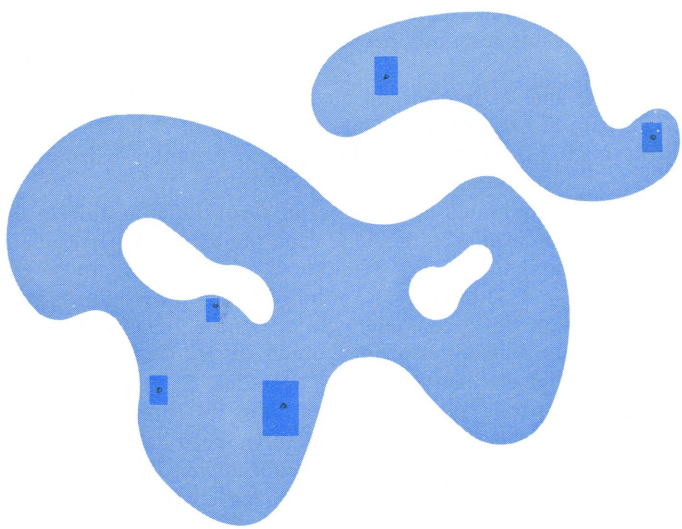


FIGURA 1-1

El lector puede suplir la demostración de que un rectángulo cerrado en $\mathbf{R}^n$ es efectivamente un conjunto cerrado.

Si $A \subset \mathbf{R}^n$ y $x \in \mathbf{R}^n$, entonces se verifica una de las tres posibilidades (Figura 1-2).

1. Existe un rectángulo abierto B tal que $x \in B \subset A$.
2. Existe un rectángulo abierto B tal que $x \in B \subset \mathbf{R}^n - A$.
3. Si B es cualquier rectángulo abierto con $x \in B$, entonces B contiene puntos de A y de $\mathbf{R}^n - A$.

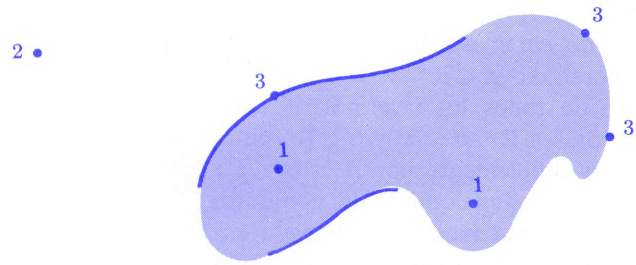


FIGURA 1-2

Los puntos que satisfacen (1) constituyen el **interior** de A, los que satisfacen (2) el **exterior** de A, y los que satisfacen (3) la **frontera** de A. Los problemas 1-16 y 1-18 muestran que estos términos pueden tener algunas veces significados inesperados.

No es difícil ver que el interior de cualquier conjunto A es abierto, y lo mismo es cierto para el exterior de A, que es, en efecto, el interior de $\mathbf{R}^n - A$. Entonces (Problema 1-14) su unión es abierta, y lo restante, la frontera, ha de ser cerrada.

Un conjunto $\mathcal{O}$ de conjuntos abiertos es un **recubrimiento abierto** de A (o, abreviadamente, un **recubrimiento** de A) si cada punto $x \in A$ pertenece a algún conjunto abierto del conjunto $\mathcal{O}$. Por ejemplo, si $\mathcal{O}$ es el conjunto de todos los intervalos abiertos $(a, a+1)$ para $a \in \mathbf{R}$, entonces $\mathcal{O}$ es un recubrimiento de $\mathbf{R}$. Es claro que un número finito cualquiera de conjuntos abiertos de $\mathcal{O}$ no recubrirá a $\mathbf{R}$, ni a ningún subconjunto no acotado de $\mathbf{R}$. Una situación análoga se puede presentar también para conjuntos acotados. Si $\mathcal{O}$ es el conjunto de todos los intervalos abiertos $(1/n, 1-1/n)$ para todos los enteros positivos $n > 2$, entonces $\mathcal{O}$ es un recubrimiento abierto de (0,1), pero también aquí ningún subconjunto finito de conjuntos de $\mathcal{O}$ es un recubrimiento de (0,1). Aunque este fenómeno puede parecer no muy sorprendente, los conjuntos para los cuales esto no sucede son de tal importancia, que se les ha dado un nombre especial: un conjunto A se denomina **compacto** si cada recubrimiento abierto $\mathcal{O}$ contiene

un subconjunto finito de conjuntos abiertos que es también un recubrimiento de A.

Un conjunto con sólo un número finito de puntos es evidentemente compacto y lo mismo ocurre con el conjunto infinito A, que contiene el 0 y los números $1/n$ para todo entero n (razón: si $\mathcal{O}$ es un recubrimiento, entonces $0 \in U$ para algún conjunto abierto U de $\mathcal{O}$; entonces sólo hay un número finito de puntos de A que no están en U, cada uno de los cuales requiere a lo sumo un nuevo conjunto abierto).

El reconocer la compacidad de los conjuntos se simplifica considerablemente mediante los siguientes resultados, de los cuales sólo en el primero se hace uso de algunas propiedades de los números reales.

1-3. Teorema (Heine-Borel). *El intervalo cerrado* $[a,b]$ *es compacto.*

Demostración. Si $\mathcal{O}$ es un recubrimiento abierto de $[a,b]$ sea

$A = \{x : a \leq x \leq b$ y $[a,x]$ es recubierto por un número finito de conjuntos abiertos de $\mathcal{O}\}$.

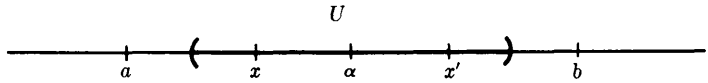


FIGURA 1-3

Obsérvese que $a \in A$ y que A está evidentemente acotado superiormente (por b). Se quiere probar que $b \in A$. Y esto se hace demostrando dos cosas acerca de α = extremo superior de A; que son (1) $\alpha \in A$ y (2) $b = \alpha$.

Puesto que $\mathcal{O}$ es un recubrimiento, $\alpha \in U$ para algún U en $\mathcal{O}$. Entonces todos los puntos de un cierto intervalo a la izquierda de α pertenecen también a U (véase Fig. 1-3). Puesto que α es el extremo superior de A, existe un x en este intervalo tal que $x \in A$. Así $[a,x]$ está recubierto por un número finito de conjuntos abiertos de $\mathcal{O}$, mientras que $[x,\alpha]$ está recubierto por el único conjunto U. Por tanto $[a,\alpha]$ está recubierto por un número finito de conjuntos abiertos de $\mathcal{O}$, y $\alpha \in A$. Esto demuestra (1).

Para demostrar que (2) es cierto, supóngase que $\alpha < b$. Entonces existiría un punto x' entre α y b tal que $[\alpha,x'] \subset U$. Puesto que $\alpha \in A$, el intervalo $[a,\alpha]$ está recubierto por un número finito de conjuntos abiertos de $\mathcal{O}$, mientras que $[\alpha,x']$ está recubierto por U. Por tanto $x' \in A$, en contra de la hipótesis de que α es el extremo superior de A. ∎

Si $B \subset \mathbf{R}^m$ es compacto y $x \in \mathbf{R}^n$, es fácil ver que $\{x\} \times B \subset \mathbf{R}^{n+m}$ es compacto. Sin embargo se puede hacer una afirmación mucho más fuerte.

1-4. Teorema. *Si B es un compacto y $\mathcal{O}$ es un recubrimiento abierto de $\{x\} \times B$, entonces, existe un conjunto abierto $U \subset \mathbf{R}^n$ que contiene a x, tal que $U \times B$ está recubierto por un número finito de conjuntos de $\mathcal{O}$.*

Demostración. Puesto que $\{x\} \times B$ es compacto, se puede suponer desde un principio que $\mathcal{O}$ es finito, con lo cual basta con encontrar el conjunto abierto U tal que $U \times B$ sea recubierto por $\mathcal{O}$.

Para cada $y \in B$ el punto (x,y) está en algún conjunto abierto W de $\mathcal{O}$. Puesto que W es abierto, se tiene $(x,y) \in U_y \times V_y \subset W$ para algún rectángulo abierto $U_y \times V_y$. Los conjuntos V_y recubren el conjunto compacto B, por tanto un número finito $V_{y_1} \ldots, V_{y_k}$ recubren también B. Sea $U = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_k}$. Entonces si $(x',y') \in U \times B$, se tiene $y' \in V_{y_i}$ para algún i (Fig. 1-4), y ciertamente $x' \in U_{y_i}$ Por tanto $(x',y') \in U_{y_i} \times V_{y_i}$ el cual está contenido en algún W de $\mathcal{O}$. ∎

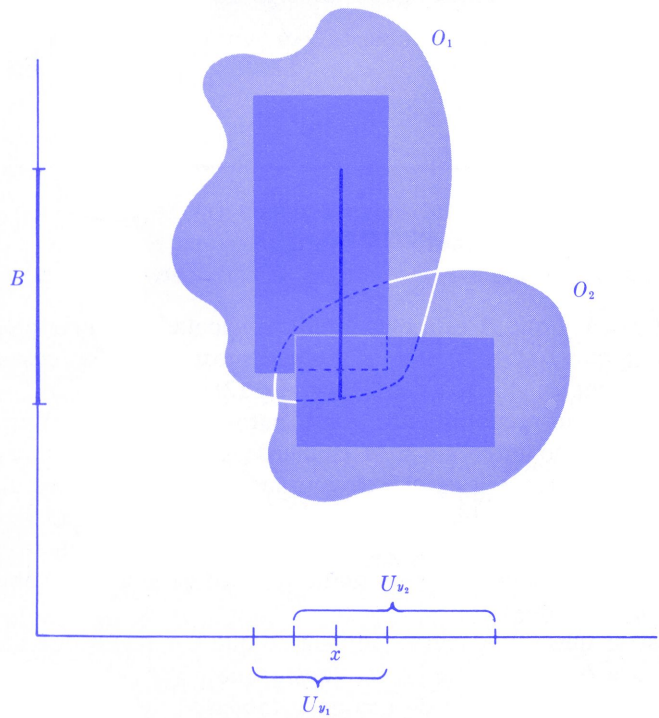


FIGURA 1-4

1-5. Corolario. *Si $A \subset \mathbf{R}^n$ y $B \subset \mathbf{R}^m$ son compactos, entonces $A \times B \subset \mathbf{R}^{n+m}$ es compacto.*

Demostración. Si $\mathcal{O}$ es un recubrimiento abierto de $A \times B$, entonces $\mathcal{O}$ recubre $\{x\} \times B$ para cada $x \in A$. En virtud del teorema 1-4 existe un conjunto abierto U_x que contiene x tal que $U_x \times B$ está recubierto por un número finito de conjuntos de $\mathcal{O}$.. Puesto que A es compacto, un número finito $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ de U_x recubren A. Puesto que un número finito de conjuntos de $\mathcal{O}$ recubre cada $U_{x_i} \times B$, un número finito recubre todo $A \times B$. ∎

1 - 6. Corolario. *$A_1 \times \ldots \times A_k$ es compacto si cada A_i lo es. En particular, un rectángulo cerrado en $\mathbf{R}^k$ es compacto.*

1 - 7. Corolario. *Un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbf{R}^n$ es compacto.* (El recíproco también es cierto. (Problema 1-20.)

Demostración. Si $A \subset \mathbf{R}^n$ es cerrado y acotado, entonces $A \subset B$ para algún rectángulo cerrado B. Si $\mathcal{O}$ es un recubrimiento abierto de A, entonces $\mathcal{O}$ junto con $\mathbf{R}^n - A$ es un recubrimiento abierto de B. Por tanto un número finito de conjuntos en $\mathcal{O}$, $U_1, \ldots, U_n$, tal vez con $\mathbf{R}^n - A$, recubren B. Entonces $U_1, \ldots, U_n$ recubren A. ∎

Problemas. **1 - 14.*** Demostrar que la unión de un número cualquiera (también infinito) de conjuntos abiertos es abierto. Demostrar que la intersección de dos (y por tanto de cualquier número finito) de conjuntos abiertos es abierto. Dar un contraejemplo para infinitos conjuntos abiertos.

1 - 15. Probar que $\{x \in \mathbf{R}^n : |x - a| < r\}$ es abierto (ver también el problema 1-27).

1 - 16. Hallar el interior, el exterior y la frontera de los conjuntos

$$\{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leq 1\}$$
$$\{x \in \mathbf{R}^n : |x| = 1\}$$
$$\{x \in \mathbf{R}^n : \text{cada } x^i \text{ es racional}\}.$$

1 - 17. Construir un conjunto $A \subset [0,1] \times [0,1]$ tal que A contenga a lo sumo un punto en cada horizontal y uno en cada vertical pero que la frontera de A sea $[0,1] \times [0,1]$. *Indicación:* Basta que A contenga puntos en cada cuarta parte del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$, en cada dieciseisava parte del cuadrado, y así sucesivamente.

1 - 18. Si $A \subset [0,1]$ es la unión de intervalos abiertos (a_i, b_i) tales que cada número racional de $(0,1)$ está contenido en algún (a_i, b_i), probar que la frontera de A es $[0,1] - A$.

1 - 19.* Si A es un conjunto cerrado que contiene cada número racional $r \in [0,1]$, probar que $[0,1] \subset A$.

1 - 20. Probar el recíproco del corolario 1-7: Un subconjunto compacto de $\mathbf{R}^n$ es cerrado y acotado (ver también el problema 1-28).

1 - 21.* (a) Si A es cerrado y $x \notin A$, probar que existe un número $d > 0$ tal que $|y - x| \geq d$ para todo $y \in A$.

(b) Si A es cerrado, B es compacto, y $A \cap B = \varnothing$, probar que existe un $d > 0$, tal que $|y - x| \geq d$ para todo $y \in A$ y $x \in B$. *Indicación:* Para cada $b \in B$ hallar un conjunto abierto U que contenga a b y tal que la relación se verifique para $x \in U \cap B$.

(c) Dar un contraejemplo en $\mathbf{R}^2$ para el caso en que A y B sean cerrados pero ninguno de los dos compacto.

1 - 22.* Si U es abierto y $C \subset U$ es compacto, probar que existe un conjunto compacto D, tal que $C \subset$ interior de D y $D \subset U$.

FUNCIONES Y CONTINUIDAD

Una función de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$ (llamada algunas veces función de n-variables (a valores vectoriales)) es una ley que asocia a cada punto de $\mathbf{R}^n$ un punto en $\mathbf{R}^m$; el punto que una función f asocia a x se designa por $f(x)$. Se escribe $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ (se lee «f aplica $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$») para indicar que $f(x) \in \mathbf{R}^m$ está definida para $x \in \mathbf{R}^n$. La notación $f : A \to \mathbf{R}^m$ indica que $f(x)$ está definida sólo para x perteneciente al conjunto A que se denomina el **dominio** de f. Si $B \subset A$, se define $f(B)$ como el conjunto de todos los $f(x)$ para $x \in B$, y si $C \subset \mathbf{R}^m$ se define $f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}$. La notación $f : A \to B$ indica que $f(A) \subset B$.

Se puede obtener una representación conveniente de la función $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ dibujando su gráfica, el conjunto de todas las ternas $(x,y,f(x,y))$, que es efectivamente una figura en el 3-espacio (ver figs. 2-1 y 2-2 del capítulo 2).

Si $f,g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, las funciones $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, y f/g se definen exactamente como en el caso de una variable. Si $f\colon A \to \mathbf{R}^m$ y $g\colon B \to \mathbf{R}^p$, donde $B \subset \mathbf{R}^m$, entonces la **composición** $g \circ f$ está definida por $g \circ f(x) = g(f(x))$; el dominio de $g \circ f$ es $A \cap f^{-1}(B)$. Si $f\colon A \to \mathbf{R}^m$ es 1-1, es decir, si $f(x) \neq f(y)$ cuando $x \neq y$, se define $f^{-1}\colon f(A) \to \mathbf{R}^n$ por la condición de que $f^{-1}(z)$ es el único $x \in A$, tal que $f(x) = z$.

Una función $f : A \to \mathbf{R}^m$ determina m **funciones componentes** $f^1, \ldots, f^m : A \to \mathbf{R}$ por ser $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^m(x))$. Recíprocamente, dadas m funciones $g_1, \ldots, g_m : A \to \mathbf{R}$, existe una función única $f : A \to \mathbf{R}^m$, tal que $f^i = g_i$, y es la función $f(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$. Esta función f se indicará $(g_1, \ldots, g_m)$ de manera que se tendrá como siempre $f = (f^1, \ldots, f^m)$. Si $\pi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ es la función idéntica, $\pi(x) = x$, entonces $\pi^i(x) = x^i$; la función π^i se denomina la i-ésima **función proyección.**

La notación $\lim_{x \to a} f(x) = b$ significa, como en el caso de una variable, que puede ser $f(x)$ tan próximo a b como se desee, eligiendo x suficientemente cercano a a, pero no igual a a. En términos matemáticos esta condición se enuncia de la siguiente forma: para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, tal que $|f(x) - b| < \varepsilon$ para todo x que satisfaga $0 < |x - a| < \delta$. Una función se dice que es **continua** en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, y $f : A \to \mathbf{R}^m$ se dice simplemente que es continua, si es continua en cada $a \in A$. Una de las sorpresas agradables del concepto de continuidad es que se puede definir sin utilizar límites. Esto es consecuencia del teorema siguiente según el cual $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es continua si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto cuando $U \subset \mathbf{R}^m$ es abierto; si el dominio de f no es todo el $\mathbf{R}^n$, la condición es ligeramente más complicada.

1 - 8. Teorema. *Si $A \subset \mathbf{R}^n$, una función $f: A \to \mathbf{R}^m$ es continua si y sólo si para cada conjunto abierto $U \subset \mathbf{R}^m$ existe algún conjunto abierto $V \subset \mathbf{R}^n$, tal que $f^{-1}(U) = V \cap A$.*

Demostración. Supóngase f continua. Si $a \in f^{-1}(U)$, entonces $f(a) \in U$. Puesto que U es abierto, existe un rectángulo abierto B, tal que $f(a) \in B \subset U$. Puesto que f es continua en a, se puede asegurar que $f(x) \in B$, siempre que se elija x en algún rectángulo suficientemente pequeño C que contenga a. Haciendo lo mismo para cada $a \in f^{-1}(U)$, sea V la unión de todos los C. Evidentemente, $f^{-1}(U) = V \cap A$. El recíproco es análogo y se deja para el lector. ∎

La siguiente consecuencia del teorema 1-8 es de gran importancia.

1 - 9. Teorema. *Si f: $A \to \mathbf{R}^m$ es continua y A es compacto, entonces $f(A)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{O}$ un recubrimiento abierto de $f(A)$. Para cada conjunto abierto U de $\mathcal{O}$ existe un conjunto abierto V_U, tal que $f^{-1}(U) = V_U \cap A$. El conjunto de todos los V_U es un recubrimiento abierto de A. Puesto que A es compacto, un número finito $V_{U1}, \ldots, V_{Un}$ recubren A. Entonces $U_1, \ldots, U_n$ recubren $f(A)$. ∎

Si $f: A \to \mathbf{R}$ es acotada, y f deja de ser continua en $a \in A$, la medida de la discontinuidad en a se puede obtener de manera precisa. Para $\delta > 0$, sea

$$M(a,f,\delta) = \sup\{f(x): x \in A \quad \text{y} \quad |x - a| < \delta\},$$
$$m(a,f,\delta) = \inf\{f(x): x \in A \quad \text{y} \quad |x - a| < \delta\}.$$

La **oscilación** $o(f,a)$ de f en a está definida por $o(f,a) = \lim_{\delta \to 0} [M(a,f,\delta) - m(a,f,\delta)]$.

Este límite existe siempre, puesto que $M(a,f,\delta) - m(a,f,\delta)$ decrece cuando δ decrece. Hay dos hechos importantes acerca de $o(f,a)$.

1 - 10. Teorema. *La función acotada f es continua en a si y sólo si $o(f,a) = 0$.*

Demostración. Sea f continua en a. Para cada número $\varepsilon > 0$ se puede escoger un número $\delta > 0$, tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ si $|x - a| < \delta$; de donde, $M(a,f,\delta) - m(a,f,\delta) \leq 2\varepsilon$. Puesto que esto es cierto para cada ε, se tiene $o(f,a) = 0$. El recíproco es análogo y se deja para el lector. ∎

1 - 11. Teorema. *Sea $A \subset \mathbf{R}^n$ cerrado. Si $f: A \to \mathbf{R}$ es una función acotada cualquiera, y $\underline{\varepsilon} > 0$, entonces $\{x \in A: o(f,x) \geq \varepsilon\}$ es cerrado.*

Demostración. Sea $B = \{x \in A: o(f,x) \geq \varepsilon\}$. Se desea probar que $\mathbf{R}^n - B$ es abierto. Si $x \in \mathbf{R}^n - B$, entonces o $x \notin A$ o $x \in A$ y $o(f,x) < \varepsilon$. En el primer caso, puesto que A es cerrado, existe un rectángulo abierto C que contiene x, tal que $C \subset \mathbf{R}^n - A \subset \mathbf{R}^n - B$. En el segundo caso existe un $\delta > 0$, tal que $M(x,f,\delta) - m(x,f,\delta) < \varepsilon$. Sea C un rectángulo abierto que contenga a x y tal que $|x-y| < \delta$ para todo $y \in C$. Entonces si $y \in C$ existe un δ_1 tal que $|x - z| < \delta$ para todo z que satisfaga $|z - y| < \delta_1$. Así $M(y,f,\delta) - m(y,f,\delta) < \varepsilon$ y por consiguiente $o(y,f) < \varepsilon$. Por tanto $C \subset \mathbf{R}^n - B$. ∎

Problemas. **1 - 23.** Si $f: A \to \mathbf{R}^m$ es 1 - 1 y $C \subset \mathbf{R}^m$, entonces $f^{-1}(C)$ se ha definido de dos maneras. Probar que coinciden.

1 - 24. Probar que $f: A \to \mathbf{R}^m$ es continua en a si y sólo si cada f^i lo es.

1 - 25. Probar que una aplicación lineal $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es continua. *Indicación:* Utilícese el problema 1-10.

1 - 26. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2: x > 0 \text{ y } 0 < y < x^2\}$.

(a) Probar que en toda recta que pase por (0,0) hay un intervalo que contiene en su interior a (0,0) y que está en $\mathbf{R}^2 - A$.

(b) Se define $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ por $f(x) = 0$ si $x \notin A$ y $f(x) = 1$ si $x \in A$. Para $h \in \mathbf{R}^2$ se define $g_h(t) = f(th)$. Probar que cada g_h es continua en 0, pero que f no es continua en (0,0).

1 - 27. Probar que $\{x \in \mathbf{R}^n: |x - a| < r\}$ es abierto, considerando la función $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ donde es $f(x) = |x - a|$.

1 - 28. Si $A \subset \mathbf{R}^n$ no es cerrado, probar que existe una función continua $f: A \to \mathbf{R}$ que es no acotada. *Indicación:* Si $x \in \mathbf{R}^n - A$, pero $x \notin$ interior $(\mathbf{R}^n - A)$, sea $f(y) = 1/|y - x|$.

1 - 29. Si A es compacto, probar que toda función continua $f: A \to \mathbf{R}$ toma en A un valor máximo y un valor mínimo.

1 - 30. Sea $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ una función creciente. Si $x_1, \ldots x_n \in [a,b]$, probar que $\sum_{i=1}^{n} o(f,x_i) < f(b) - f(a)$.

2

Diferenciación

DEFINICIONES BÁSICAS

Recuérdese que una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es diferenciable en $a \in \mathbf{R}$ si existe un número $f'(a)$ tal que

$$(1) \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Esta igualdad ciertamente no tiene sentido en el caso general de una función $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, pero se puede formular en otros términos de manera que lo tenga. Si $\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una aplicación lineal definida por $\lambda(h) = f'(a) \cdot h$, entonces la igualdad (1) es equivalente a

$$(2) \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{h} = 0.$$

La igualdad (2) se interpreta frecuentemente diciendo que $\lambda + f(a)$ es una buena aproximación de f en a (ver problema 2-9). En lo sucesivo se centra la atención en la aplicación lineal λ y se formula de nuevo la definición de diferenciabilidad como sigue.

Una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es diferenciable en $a \in \mathbf{R}$ si existe una transformación lineal $\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{h} = 0.$$

En esta forma la definición tiene una generalización sencilla a dimensión superior:

Una función f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es **diferenciable** en $a \in \mathbf{R}^n$ si existe una transformación lineal $\lambda : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = 0.$$

Obsérvese que h es un punto de $\mathbf{R}^n$ y $f(a+h) - f(a) - \lambda(h)$ un punto de $\mathbf{R}^m$, por lo cual es esencial considerar las normas. La transformación lineal λ se designa por $Df(a)$ y se denomina la **diferencial** de f en a. La justificación de la frase «*la* transformación lineal λ» es

2-1. Teorema. *Si* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *es diferenciable en* $a \in \mathbf{R}^n$, *existe una transformación lineal* única $\lambda : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *tal que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = 0.$$

Demostración. Supóngase que $\mu : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ satisface

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \mu(h)|}{|h|} = 0.$$

Si $d(h) = f(a+h) - f(a)$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{|\lambda(h) - \mu(h)|}{|h|} &= \lim_{h\to 0} \frac{|\lambda(h) - d(h) + d(h) - \mu(h)|}{|h|} \\ &\leq \lim_{h\to 0} \frac{|\lambda(h) - d(h)|}{|h|} + \lim_{h\to 0} \frac{|d(h) - \mu(h)|}{|h|} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Si $x \in \mathbf{R}^n$, entonces $tx \to 0$ cuando $t \to 0$. Por tanto, para $x \neq 0$, se tiene

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{|\lambda(tx) - \mu(tx)|}{|tx|} = \frac{|\lambda(x) - \mu(x)|}{|x|}.$$

Por tanto $\lambda(x) = \mu(x)$. ∎

Más adelante se expondrá un método simple para hallar $Df(a)$. De momento considérese, a manera de ejemplo, la función $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $f(x,y) = \operatorname{sen} x$. Entonces $Df(a,b) = \lambda$ satisface $\lambda(x,y) = (\cos a) \cdot x$. Para probarlo obsérvese que

$$\lim_{(h,k) \to 0} \frac{|f(a + h, b + k) - f(a,b) - \lambda(h,k)|}{|(h,k)|} = \lim_{(h,k) \to 0} \frac{|\operatorname{sen}(a + h) - \operatorname{sen} a - (\cos a) \cdot h|}{|(h,k)|}.$$

Puesto que $\operatorname{sen}'(a) = \cos a$, se tiene

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\operatorname{sen}(a + h) - \operatorname{sen} a - (\cos a) \cdot h|}{|h|} = 0.$$

Puesto que $|(h,k)| \geqq |h|$, también es cierto que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\operatorname{sen}(a + h) - \operatorname{sen} a - (\cos a) \cdot h|}{|(h,k)|} = 0.$$

Muchas veces es conveniente considerar la matriz de $Df(a) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ respecto a las bases usuales de $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{R}^m$. Esta matriz $m \times n$ se denomina la **matriz jacobiana** de f en a, y se indica por $f'(a)$. Si $f(x,y) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(a,b) = (\cos a, 0)$. Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, entonces $f'(a)$ es una matriz 1×1 cuyo único elemento es el número que en cálculo elemental se indica por $f'(a)$.

La definición de $Df(a)$ podría darse si f estuviera definida sólo en un conjunto abierto que contuviera a a. Considerar sólo funciones definidas en $\mathbf{R}^n$ acortan los enunciados de los teoremas sin que por ello se quite generalidad. Es conveniente definir una función f como diferenciable en A si f es diferenciable en a para cada $a \in A$. Si f: $A \to \mathbf{R}^m$, entonces f se denomina diferenciable, si se puede extender f a una función diferenciable en un conjunto abierto que contenga el A.

Problemas. 2 - 1. Probar que si $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es diferenciable en $a \in \mathbf{R}^n$, entonces es continua en a. *Indicación:* Utilícese el problema 1-10.

2 - 2. Una función $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es **independiente de la segunda variable** si para cada $x \in \mathbf{R}$ se tiene $f(x,y_1) = f(x,y_2)$ para cada $y_1, y_2, \in \mathbf{R}$. Probar que f es independiente de la segunda variable, si y sólo si existe una función $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x,y) = g(x)$. ¿Cómo se expresa $f'(a,b)$ por medio de g'?

2 - 3. Definir cuándo una función $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es independiente de la primera variable y hallar $f'(a,b)$ para una f en estas condiciones. ¿Qué funciones son independientes de la primera y también de la segunda variable?

2 - 4. Sea g una función continua en la circunferencia unidad $\{x \in \mathbf{R}^2 : |x| = 1\}$ tal que $g(0,1) = g(1,0) = 0$ y $g(-x) = -g(x)$. Se define $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} |x| \cdot g\left(\dfrac{x}{|x|}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

(a) Si $x \in \mathbf{R}^2$ y h está definida por $h(t) = f(tx)$, probar que h es diferenciable.

(b) Probar que f no es diferenciable en (0,0) salvo en el caso de ser $g = 0$. *Indicación:* Primero probar que $Df(0,0)$ habría de ser 0 considerando (h,k) con $k = 0$ y después con $h = 0$.

2 - 5. Sea f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \neq 0, \\ 0 & (x,y) = 0. \end{cases}$$

Probar que f es una función del tipo de las consideradas en el problema 2-4, de manera que f no es diferenciable en (0,0).

2 - 6. Sea f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Probar que f no es diferenciable en (0,0).

2 - 7. Sea f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una función tal que $|f(x)| \leq |x|^2$. Probar que f es diferenciable en 0.

2 - 8. Sea f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$. Probar que f es diferenciable en $a \in \mathbf{R}$ si y sólo si f^1 y f^2 lo son, y que en este caso

$$f'(a) = \begin{pmatrix} (f^1)'(a) \\ (f^2)'(a) \end{pmatrix}.$$

2 - 9. Dos funciones f,g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ son **iguales hasta el orden n** en a si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - g(a+h)}{h^n} = 0.$$

(a) Probar que f es diferenciable en a si y sólo si existe una función g de la forma $g(x) = a_0 + a_1(x - a)$ tal que f y g son iguales hasta el primer orden en a.

(b) Si $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ existen, probar que f y la función g definida por

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i$$

son iguales hasta el orden n. *Indicación:* El límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i}{(x-a)^n}$$

puede calcularse por la regla de l'Hôpital.

TEOREMAS BÁSICOS

2-2. Teorema (Regla de la cadena). *Si* $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *es diferenciable en* a, *y* $g: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ *es diferenciable en* $f(a)$, *entonces la compuesta* $g \circ f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ *es diferenciable en* a, *y*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Observación. Esta ecuación se puede escribir

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Si $m = n = p = 1$, se obtiene la regla de la cadena.

Demostración. Sean $b = f(a)$, $\lambda = Df(a)$, y $\mu = Dg(f(a))$. Si se define

$$\begin{aligned}
&(1)\ \varphi(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x-a),\\
&(2)\ \psi(y) = g(y) - g(b) - \mu(y-b),\\
&(3)\ \rho(x) = g \circ f(x) - g \circ f(a) - \mu \circ \lambda(x-a),
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
&(4)\ \lim_{x \to a} \frac{|\varphi(x)|}{|x-a|} = 0,\\
&(5)\ \lim_{y \to b} \frac{|\psi(y)|}{|y-b|} = 0,
\end{aligned}$$

y hay que probar que

$$\lim_{x \to a} \frac{|\rho(x)|}{|x-a|} = 0.$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}\rho(x) &= g(f(x)) - g(b) - \mu(\lambda(x-a)) \\ &= g(f(x)) - g(b) - \mu(f(x) - f(a) - \varphi(x)) \qquad \text{por (1)} \\ &= [g(f(x)) - g(b) - \mu(f(x) - f(a))] + \mu(\varphi(x)) \\ &= \psi(f(x)) + \mu(\varphi(x)) \qquad \text{por (2).}\end{aligned}$$

Así se ha de demostrar

$$(6)\ \lim_{x\to a} \frac{|\psi(f(x))|}{|x-a|} = 0,$$

$$(7)\ \lim_{x\to a} \frac{|\mu(\varphi(x))|}{|x-a|} = 0.$$

La ecuación (7) se deduce fácilmente de (4) y del problema 1-10. Si $\varepsilon > 0$ se deduce de (5) que para un $\delta > 0$ se tiene

$$|\psi(f(x))| < \varepsilon |f(x) - b| \qquad \text{si } |f(x) - b| < \delta,$$

lo cual es cierto si $|x-a| < \delta_1$, para un δ_1 conveniente. Entonces

$$\begin{aligned}|\psi(f(x))| &< \varepsilon |f(x) - b| \\ &= \varepsilon |\varphi(x) + \lambda(x-a)| \\ &\leq \varepsilon |\varphi(x)| + \varepsilon M |x-a|\end{aligned}$$

para un M, en virtud del problema 1-10. La igualdad (6) se deduce ahora fácilmente. ∎

2-3. Teorema

(1) *Si* $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *es una función constante (es decir, si para un* $y \in \mathbf{R}^m$ *se tiene* $f(x) = y$ *para todo* $x \in \mathbf{R}^n$*), entonces*

$$Df(a) = 0.$$

(2) *Si* $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *es una transformación lineal, entonces*

$$Df(a) = f.$$

(3) *Si* $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$*, entonces* f *es diferenciable en* $a \in \mathbf{R}^n$ *si y sólo si cada* f^i *lo es, y*

$$Df(a) = (Df^1(a), \ldots, Df^m(a)).$$

Así que $f'(a)$ *es la matriz* $m \times n$ *cuya* i*-ésima* fila *es* $(f^i)'(a)$.

(4) *Si* $s : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *está definida por* $s(x,y) = x + y$, *entonces*

$$Ds(a,b) = s.$$

(5) *Si* $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *está definida por* $p(x,y) = x \cdot y$, *entonces*

$$Dp(a,b)(x,y) = bx + ay.$$

Así que $p'(a,b) = (b,a)$

Demostración

(1) $$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - 0|}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{|y - y - 0|}{|h|} = 0.$$

(2) $$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - f(h)|}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{|f(a) + f(h) - f(a) - f(h)|}{|h|} = 0.$$

(3) Si cada f^i es diferenciable en a y

$$\lambda = (Df^1(a), \ldots, Df^n(a)),$$

entonces

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) - \lambda(h) &= (f^1(a+h) - f^1(a) - Df^1(a)(h), \ldots, \\ &\qquad f^n(a+h) - f^n(a) - Df^n(a)(h)). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} \leq \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{|f^i(a+h) - f^i(a) - Df^i(a)(h)|}{|h|} = 0.$$

Si, por otra parte, f es diferenciable en a, entonces $f^i = \pi^i \circ f$ es diferenciable en virtud de (2) y del teorema 2-2.

(4) es consecuencia de (2).

(5) Sea $\lambda(x,y) = bx + ay$. Entonces

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{|p(a+h,\, b+k) - p(a,b) - \lambda(h,k)|}{|(h,k)|}$$
$$= \lim_{(h,k)\to 0} \frac{|hk|}{|(h,k)|}.$$

Ahora

$$|hk| \leq \begin{cases} |h|^2 & \text{si } |k| \leq |h|, \\ |k|^2 & \text{si } |h| \leq |k|. \end{cases}$$

Luego $|hk| \leq |h|^2 + |k|^2$. Por tanto

$$\frac{|hk|}{|(h,k)|} \leq \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \sqrt{h^2 + k^2},$$

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{|hk|}{|(h,k)|} = 0. \quad \blacksquare$$

2-4. Corolario. *Si* $f,g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *son diferenciables en* a, *entonces*

$$D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a),$$
$$D(f \cdot g)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a).$$

Si, además, $g(a) \neq 0$, *es*

$$D(f/g)(a) = \frac{g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)}{[g(a)]^2}.$$

Demostración. Se demostrará la primera ecuación dejando las demás para el lector. Puesto que $f + g = s \circ (f,g)$, se tiene

$$\begin{aligned} D(f+g)(a) &= Ds(f(a),g(a)) \circ D(f,g)(a) \\ &= s \circ (Df(a), Dg(a)) \\ &= Df(a) + Dg(a). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Con todo esto, se ha asegurado la diferenciabilidad de aquellas funciones $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, cuyas funciones componentes se obtienen por adición, multiplicación, división y composición, de las funciones π^i (que son transformaciones lineales) y las funciones que pueden diferenciarse por cálculos elementales. Sin

embargo, hallar $Df(x)$ o $f'(x)$ puede resultar muy trabajoso. Por ejemplo, sea $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy^2)$. Puesto que $f = \operatorname{sen} \circ (\pi^1 \cdot [\pi^2]^2)$, se tiene

$$\begin{aligned} f'(a,b) &= \operatorname{sen}'(ab^2) \cdot [b^2(\pi^1)'(a,b) + a([\pi^2]^2)'(a,b)] \\ &= \operatorname{sen}'(ab^2) \cdot [b^2(\pi^1)'(a,b) + 2ab(\pi^2)'(a,b)] \\ &= (\cos(ab^2)) \cdot [b^2(1,0) + 2ab(0,1)] \\ &= (b^2 \cos(ab^2),\ 2ab \cos(ab^2)). \end{aligned}$$

Afortunadamente, pronto se descubrirá un método mucho más simple para calcular f'.

Problemas **2 - 10.** Utilizando los teoremas de esta sección hallar f' para las siguientes funciones:

(a) $f(x,y,z) = x^y$.
(b) $f(x,y,z) = (x^y, z)$.
(c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} y)$.
(d) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}(y \operatorname{sen} z))$.
(e) $f(x,y,z) = x^{y^z}$.
(f) $f(x,y,z) = x^{y+z}$.
(g) $f(x,y,z) = (x + y)^z$.
(h) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$.
(i) $f(x,y) = [\operatorname{sen}(xy)]^{\cos 3}$.
(j) $f(x,y) = (\operatorname{sen}(xy), \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} y),\ x^y)$.

2 - 11. Hallar f' para las siguientes funciones (donde g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es continua):

(a) $f(x,y) = \int_a^{x+y} g$.
(b) $f(x,y) = \int_a^{x \cdot y} g$.
(c) $f(x,y,z) = \int_{xy}^{\operatorname{sen}(x \operatorname{sen}(y \operatorname{sen} z))} g$.

2 - 12. Una función f: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ es **bilineal** si para $x, x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$, $y, y_1, y_2 \in \mathbf{R}^m$, y $a \in \mathbf{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} f(ax,y) &= af(x,y) = f(x,ay), \\ f(x_1 + x_2, y) &= f(x_1,y) + f(x_2,y), \\ f(x, y_1 + y_2) &= f(x,y_1) + f(x,y_2). \end{aligned}$$

(a) Probar que si f es bilineal, entonces

$$\lim_{(h,k) \to 0} \frac{|f(h,k)|}{|(h,k)|} = 0.$$

(b) Probar que $Df(a,b)(x,y) = f(a,y) + f(x,b)$.

(c) Mostrar que la fórmula para $Dp(a,b)$ en el teorema 2-3 es un caso particular de (b).

2 - 13. Definir IP: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ por $IP(x,y) = \langle x,y \rangle$.

(a) Hallar $D(IP)(a,b)$ y $(IP)'(a,b)$.

(b) Si f,g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ son diferenciables y h: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ está definida por $h(t) = \langle f(t),g(t) \rangle$, probar que

$$h'(a) = \langle f'(a)^{\mathrm{T}},g(a) \rangle + \langle f(a),g'(a)^{\mathrm{T}} \rangle.$$

(Obsérvese que $f'(a)$ es una matriz $n \times 1$; su transpuesta $f'(a)^T$ es una matriz $1 \times n$, que se considera como un elemento de $\mathbf{R}^n$.)

(c) Si f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ es diferenciable y $|f(t)| = 1$ para todo t, probar que $\langle f'(t)^{\mathrm{T}},f(t) \rangle = 0$.

(d) Dar una función diferenciable f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que la función $|f|$ definida por $|f|(t) = |f(t)|$ no sea diferenciable.

2 - 14. Sean E_i, $i = 1,\ldots,k$ espacios euclídeos de varias dimensiones. Una función f: $E_1 \times \ldots \times E_k \to \mathbf{R}^p$ se denomina **multilineal** si para cada elección de $x_j \in E_j$, $j \neq i$ la función g: $E_i \to \mathbf{R}^p$ definida por $g(x) = f(x_1,\ldots,x_{i-1},x,x_{i+1},\ldots,x_k)$ es una *transformación lineal*.

(a) Si f es multilineal y $i \neq j$, probar que para $h = (h_1,\ldots,h_k)$ con $h_l \in E_l$ se tiene

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a_1, \ldots, h_i, \ldots, h_j, \ldots, a_k)|}{|h|} = 0.$$

Indicación: Si $g(x,y) = f(a_1,\ldots,x,\ldots,y,\ldots,a_k)$, entonces g es bilineal.

(b) Demostrar que

$$Df(a_1, \ldots, a_k)(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_k).$$

2 - 15. Considérese una matriz $n \times n$ como un elemento en el producto de n factores $\mathbf{R}^n \times \ldots \times \mathbf{R}^n$ considerando cada columna como un elemento de $\mathbf{R}^n$.

(a) Demostrar que det: $\mathbf{R}^n \times \ldots \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es diferenciable y

$$D(\det)(a_1, \ldots, a_n)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}.$$

(b) Si a_{ij}: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ son diferenciables y $f(t) = \det(a_{ij}(t))$, probar que

$$f'(t) = \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} a_{11}(t), & \ldots & ,a_{1n}(t) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{j1}'(t), & \ldots & ,a_{jn}'(t) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1}(t), & \ldots & ,a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

(c) Si $\det(a_{ij}(t)) \neq 0$ para todo t y $b_1, \ldots, b_n$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ son diferenciables, sean $s_1, \ldots, s_n$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funciones tales que $s_1(t), \ldots, s_n(t)$ son la solución del sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_j(t) = b_j(t) \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Probar que s_i es diferenciable y hallar $s_i'(t)$.

2 - 16. Supóngase f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ diferenciable, y que tiene una inversa diferenciable f^{-1}: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Probar que $(f^{-1})'(a) = [f'(f^{-1}(a))]^{-1}$.
Indicación: $f \circ f^{-1}(x) = x$.

DERIVADAS PARCIALES

Se trata ahora de atacar el problema de hallar derivadas «cada vez respecto a una variable». Si $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ y $a \in \mathbf{R}^n$, el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a^1, \ldots, a^i + h, \ldots, a^n) - f(a^1, \ldots, a^n)}{h},$$

si existe, se indica por $D_i f(a)$, y se denomina la **derivada parcial** i-ésima, o respecto de la variable x_i de f en a. Es importante observar que $D_i f(a)$ es la derivada ordinaria de una cierta función; en efecto, si $g(x) = f(a^1, \ldots, x, \ldots, a^n)$, entonces $D_i f(a) = g'(a^i)$. Esto significa que $D_i f(a)$ es la pendiente de la tangente en $(a, f(a))$ a la curva obtenida cortando la gráfica de f con los planos $x^j = a^j$, $j \neq i$ (Fig. 2-1). Consecuencia es que el cálculo de $D_i f(a)$ es un problema que ya se sabe resolver. Si $f(x^1, \ldots, x^n)$ está dada por alguna fórmula que contenga $x^1, \ldots, x^n$, entonces se halla $D_i f(x^1, \ldots, x^n)$ derivando la función de x^i obtenida considerando en la fórmula todas las x^j para $j \neq i$ constantes. Por ejemplo, si $f(x,y) = \text{sen}\ (xy^2)$, entonces $D_1 f(x,y) = y^2 \cos(xy^2)$ y $D_2 f(x,y) = 2xy \cos(xy^2)$. En cambio, si es $f(x,y) = x^y$, entonces $D_1 f(x,y) = yx^{y-1}$ y $D_2 f(x,y) = x^y \log x$.

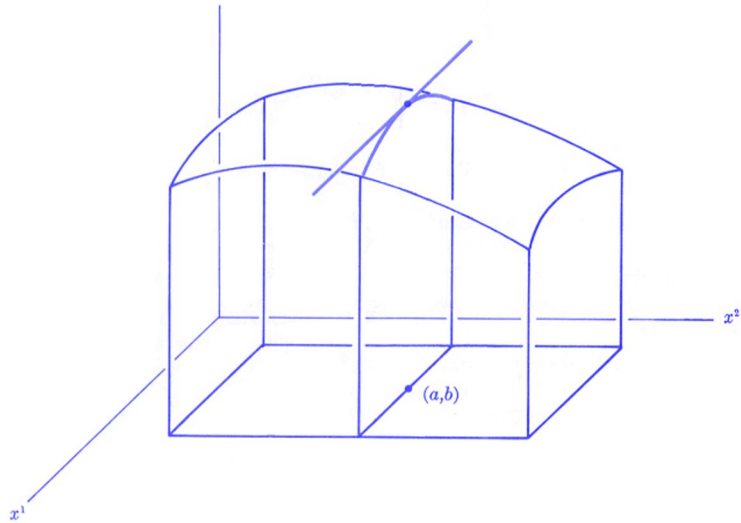


FIGURA 2-1

Con un poco de práctica (realícense los problemas del final de esta sección) se adquirirá la misma facilidad para calcular $D_i f$ que se tiene ya para calcular derivadas ordinarias.

Si $D_i f(x)$ existe para todo $x \in \mathbf{R}^n$, se obtiene una función $D_i f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. La derivada parcial respecto x_j de esta función en x, esto es, $D_j(D_i f)(x)$, se acostumbra a designar por $D_{i,j} f(x)$. Obsérvese que en esta notación se cambia el orden de i y j. De hecho en general el orden no importa, puesto que para la mayor parte de funciones (una excepción se da en los problemas) se verifica $D_{i,j} f = D_{j,i} f$. Hay varios teoremas delicados que aseguran esta igualdad; el que se da a continuación basta para las aplicaciones posteriores. Aquí solamente se enuncia dejando la demostración para más adelante. (Problema 3-28.)

2-5. Teorema. *Si $D_{i,j} f$ y $D_{j,i} f$ son continuas en un conjunto abierto que contenga a, entonces*

$$D_{i,j} f(a) = D_{j,i} f(a).$$

La función $D_{i,j} f$ se denomina **derivada parcial segunda (mixta)** de f. Las derivadas parciales mixtas de orden superior se definen de forma análoga. Evidentemente, el teorema 2-5 puede utilizarse para probar la igualdad de las deri-

vadas parciales mixtas de orden superior en condiciones apropiadas. El orden de $i_1, \ldots, i_k$ carece totalmente de importancia en $D_{i1}, \ldots, {}_{ik}f$ si f posee derivadas parciales continuas de todos los órdenes. Una función con esta propiedad se dice que es una función C^∞. En capítulos posteriores con frecuencia será conveniente limitar la atención a las funciones C^∞.

En la sección siguiente se utilizarán las derivadas parciales para hallar diferenciales. También tienen otra aplicación importante que es la de hallar máximos y mínimos de funciones.

2-6. Teorema. *Sea $A \subset \mathbf{R}^n$. Si el máximo de $f : A \to \mathbf{R}$ se presenta en un punto a del interior de A y $D_i f(a)$ existe, entonces $D_i f(a) = 0$.*

Demostración. Sea $g_i(x) = f(x^1, \ldots, x, \ldots, x^n)$. Evidentemente, g_i tiene un máximo (o un mínimo) en a^i, y g_i está definida en un intervalo abierto que contiene a a^i. Por tanto, $0 = g'_i(a^i) = D_i f(a)$.

El lector recordará que el recíproco del teorema 2-6 es falso ya en el caso $n = 1$ (si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ está definida por $f(x) = x^3$, entonces $f'(0) = 0$, pero 0 no es ni un máximo ni un mínimo local). Si $n > 1$, el recíproco del teorema 2-6 puede dejar de ser cierto en una forma más espectacular. Supóngase, por ejemplo, que

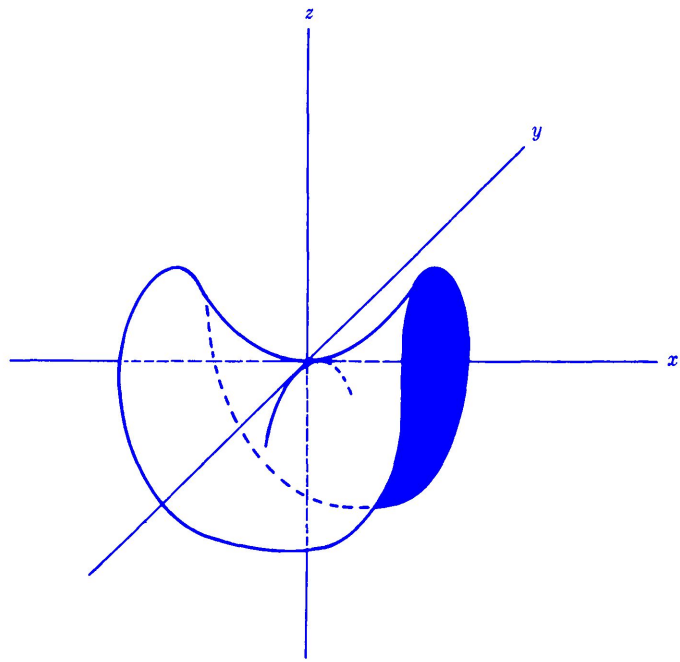


FIGURA 2-2

$f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ está definida por $f(x,y) = x^2 - y^2$ (Fig. 2-2). Entonces, $D_1 f(0,0) = 0$ puesto que g_1 tiene un mínimo en 0, y $D_2 f(0,0) = 0$ puesto que g_2 tiene un máximo en 0. Evidentemente (0,0) no es ni un máximo relativo ni un mínimo relativo.

Si se utiliza el teorema 2-6 para hallar los máximos o mínimos de f en A los valores de f en los puntos de la frontera se han de estudiar separadamente, lo que es una tarea difícil, puesto que la frontera de A puede ser todo el A! El problema 2-27 indica un camino para hacer tal estudio, y el problema 5-16 establece un método de utilidad en muchos casos.

Problemas. **2 - 17.** Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y,z) = x^y$.
(b) $f(x,y,z) = z$.
(c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} y)$.
(d) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}(y \operatorname{sen} z))$.
(e) $f(x,y,z) = x^{y^z}$.
(f) $f(x,y,z) = x^{y+z}$.
(g) $f(x,y,z) = (x+y)^z$.
(h) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$.
(i) $f(x,y) = [\operatorname{sen}(xy)]^{\cos 3}$.

2 - 18. Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones (donde g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es continua):

(a) $f(x,y) = \int_a^{x+y} g$.
(b) $f(x,y) = \int_y^x g$.
(c) $f(x,y) = \int_a^{xy} g$.
(d) $f(x,y) = \int_a^{\left(\int_b^y g\right)} g$.

2 - 19. Si $f(x,y) = x^{x^{x^{xy}}} + (\log x)(\arctan(\arctan(\arctan(\operatorname{sen}(\cos xy) - \log(x+y)))))$ hallar $D_2 f(1,y)$. *Indicación:* Hay un camino sencillo para hacerlo.

2 - 20. Hallar las derivadas parciales de f por medio de las derivadas de g y de h si

(a) $f(x,y) = g(x)h(y)$.
(b) $f(x,y) = g(x)^{h(y)}$.
(c) $f(x,y) = g(x)$.
(d) $f(x,y) = g(y)$.
(e) $f(x,y) = g(x+y)$.

2 - 21.* Sean g_1, g_2: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ continuas. Se define f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ por

$$f(x,y) = \int_0^x g_1(t,0)dt + \int_0^y g_2(x,t)dt.$$

(a) Probar que $D_2 f(x,y) = g_2(x,y)$.
(b) ¿Cómo habrá de definirse f de manera que $D_1 f(x,y) = g_1(x,y)$?

(c) Hallar una función f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tal que $D_1f(x,y) = x$ y $D_2f(x,y) = y$. Hallar otra tal que $D_1f(x,y) = y$ y $D_2f(x,y) = x$.

2 - 22.* Si f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ y $D_2f = 0$, probar que f es independiente de la segunda variable. Si $D_1f = D_2f = 0$, probar que f es constante.

2 - 23.* Sea $A = \{(x,y) : x < 0, \text{ o } x \geqq 0 \text{ y } y \neq 0\}$.

(a) Si f: $A \to \mathbf{R}$ y $D_1f = D_2f = 0$, probar que f es constante. *Indicación:* Obsérvese que cada dos puntos de A se pueden unir por una sucesión de rectas paralelas cada una paralela a uno de los ejes.

(b) Hallar una función f: $A \to \mathbf{R}$ tal que $D_2f = 0$ pero que f no sea independiente de la segunda variable.

2 - 24. Se define f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq 0, \\ 0 & (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Probar que $D_2f(x,0) = x$ para todo x y $D_1f(0,y) = -y$ para todo y.

(b) Probar que $D_{1,2}f(0,0) \neq D_{2,1}f(0,0)$.

2 - 25.* Se define f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Probar que f es una función C^∞, y $f^{(i)}(0) = 0$ para todo i. *Indicación:* El límite $f'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{e^{-h^{-2}}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{1/h}{e^{h^{-2}}}$ se puede calcular por la regla de l'Hôpital. Se puede calcular fácilmente $f'(x)$ para $x \neq 0$, y $f'(0) = \lim_{h\to 0} f'(h)$ puede hallarse por la regla de l'Hôpital.

2 - 26.* Sea $f(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)^{-2}} \cdot e^{-(x+1)^{-2}} & x \in (-1,1), \\ 0 & x \notin (-1,1). \end{cases}$

(a) Probar que f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una función C^∞ que es positiva en $(-1,1)$ y 0 en el resto.

(b) Probar que existe una función C^∞, g: $\mathbf{R} \to [0,1]$ tal que $g(x) = 0$ para $x \leqq 0$ y $g(x) = 1$ para $x \geqq \varepsilon$. *Indicación:* Si f es una función C^∞ que es positiva en $(0,\varepsilon)$ y 0 en el resto, sea $g(x) = \int_0^x f / \int_0^\varepsilon f$.

(c) Si $a \in \mathbf{R}^n$, se define g: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ por

$$g(x) = f([x^1 - a^1]/\varepsilon) \cdot \ldots \cdot f([x^n - a^n]/\varepsilon).$$

Probar que g es una función C^∞ que es positiva en

$$(a^1 - \varepsilon, a^1 + \varepsilon) \times \cdots \times (a^n - \varepsilon, a^n + \varepsilon)$$

y cero en el resto.

(d) Si A es abierto y $C \subset A$ es compacto, probar que existe una función C^∞ no negativa, f: $A \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) > 0$ para $x \in C$ y $f = 0$ en el exterior de un conjunto cerrado contenido en A.

(e) Probar que se puede elegir un f tal que $f\colon A \to [0,1]$ y $f(x) = 1$ para $x \in C$. *Indicación:* Si la función f de (d) satisface $f(x) \geqq \varepsilon$ para $x \in C$, considérese $g \circ f$, donde g es la función de (b).

2 - 27. Defínense g,h: $\{x \in \mathbf{R}^2\colon |x| \leq 1\} \to \mathbf{R}^3$ por

$$g(x,y) = (x,y,\sqrt{1 - x^2 - y^2}),$$
$$h(x,y) = (x,y,-\sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

Demuéstrese que el máximo de una función f en $\{x \in \mathbf{R}^3\colon |x| = 1\}$ o es el máximo de $f \circ g$ o el máximo de $f \circ h$ en $\{x \in \mathbf{R}^2\colon |x| \leq 1\}$.

DERIVADAS

El lector que haya comparado los problemas 2-10 y 2-17 ya habrá sospechado que se verifica el siguiente:

2 - 7. Teorema. *Si $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es diferenciable en a, entonces $D_j f^i(a)$ existe para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ y $f'(a)$ es la matriz $m \times n$ de la forma $(D_j f^i(a))$.*

Demostración. Supóngase primero que $m = 1$, de manera que $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Se define $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ por $h(x) = (a^1, \ldots, x, \ldots, a^n)$, donde la x está en el lugar j. Entonces, $D_j f(a) = (f \circ h)'(a^j)$. Por tanto, en virtud del teorema 2-2,

$$(f \circ h)'(a^j) = f'(a) \cdot h'(a^j)$$
$$= f'(a) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{lugar } j$$

Puesto que $(f \circ h)'(a^j)$ tiene como único elemento $D_j f(a)$, esto muestra que $D_j f(a)$ existe y es el elemento de lugar j de la matriz $1 \times n$, $f'(a)$.

El teorema ahora se deduce para m arbitrario puesto que, en virtud del teorema 2-3, cada f^i es diferenciable y la i-ésima fila de $f'(a)$ es $(f^i)'(a)$. ∎

Hay varios ejemplos en los problemas que muestran que el recíproco del teorema 2-7 es falso. Es cierto, sin embargo, si se añade una hipótesis suplementaria.

2-8. Teorema. *Si* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, *existe* $Df(a)$ *si todas las* $D_j f^i(x)$ *existen en un conjunto abierto que contenga a y si cada función* $D_j f^i$ *es continua en a.* (Una tal función f se dice que es **diferenciable con continuidad** en a.)

Demostración. Como en la demostración del teorema 2-7, basta considerar el caso $m = 1$, de manera que f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) = {} & f(a^1 + h^1, a^2, \ldots, a^n) - f(a^1, \ldots, a^n) \\ & + f(a^1 + h^1, a^2 + h^2, a^3, \ldots, a^n) \\ & \qquad - f(a^1 + h^1, a^2, \ldots, a^n) \\ & + \cdots \\ & + f(a^1 + h^1, \ldots, a^n + h^n) \\ & \qquad - f(a^1 + h^1, \ldots, a^{n-1} + h^{n-1}, a^n). \end{aligned}$$

Recuérdese que $D_1 f$ es la derivada de la función g definida por $g(x) = f(x, a^2, \ldots, a^n)$. Aplicando el teorema del valor medio a g, se obtiene

$$\begin{aligned} f(a^1 + h^1, a^2, \ldots, a^n) - f(a^1, \ldots, a^n) \\ = h^1 \cdot D_1 f(b_1, a^2, \ldots, a^n) \end{aligned}$$

para un b_1 entre a^1 y $a^1 + h^1$. Análogamente, el término i-ésimo en la suma es igual a

$$h^i \cdot D_i f(a^1 + h^1, \ldots, a^{i-1} + h^{i-1}, b_i, \ldots, a^n) = h^i D_i f(c_i),$$

para un cierto c_i. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} & \frac{\left| f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) \cdot h^i \right|}{|h|} \\ & = \lim_{h \to 0} \frac{\left| \sum_{i=1}^{n} [D_i f(c_i) - D_i f(a)] \cdot h^i \right|}{|h|} \\ & \leq \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} |D_i f(c_i) - D_i f(a)| \cdot \frac{|h^i|}{|h|} \\ & \leq \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} |D_i f(c_i) - D_i f(a)| \\ & = 0, \end{aligned}$$

puesto que $D_i f$ es continua en a. ∎

Aunque la regla de la cadena se ha utilizado en la demostración del teorema 2-7 podría eliminarse fácilmente. Con el teorema 2-8 que proporciona funciones diferenciables y el teorema 2-7 que proporciona sus diferenciales, la regla de la cadena pudiera parecer casi superflua. Sin embargo, tiene un corolario muy importante relativo a las derivadas parciales.

2-9. Teorema. *Sean* $g_1, \ldots, g_m : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *diferenciables con continuidad en a, y sea* $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ *diferenciable con continuidad en* $(g_1(a), \ldots, g_m(a))$. *Se define* $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *por* $F(x) = f(g_1(x), \ldots, g_m(x))$. *Entonces*

$$D_i F(a) = \sum_{j=1}^{m} D_j f(g_1(a), \ldots, g_m(a)) \cdot D_i g_j(a).$$

Demostración. La función F es precisamente la composición $f \circ g$, donde $g = (g_1, \ldots, g_m)$. Puesto que g_i es diferenciable con continuidad en a, se sigue del teorema 2-8 que g es diferenciable en a. Análogamente, f es diferenciable en $(g_1(a), \ldots, g_m(a))$. Por tanto, en virtud del teorema 2-2,

$$F'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) =$$

$$(D_1 f(g(a)), \ldots, D_m f(g(a))) \cdot \begin{pmatrix} D_1 g_1(a), & \cdots & , D_n g_1(a) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ D_1 g_m(a), & \ldots & , D_n g_m(a) \end{pmatrix}$$

Pero $D_i F(a)$ es el elemento i-ésimo del primer miembro de esta ecuación, mientras que $\Sigma_{j=1}^{m} D_j f(g_1(a), \ldots, g_m(a)) \cdot D_i g_j(a)$ es el elemento i-ésimo del segundo miembro.

El teorema 2-9 se denomina con frecuencia *regla de la cadena*, pero es más débil que el teorema 2-2 ya que g o f podrían ser diferenciables sin que g_i o f fueran diferenciables con continuidad (véase problema 2-32). La mayor parte de cálculos que requieren el teorema 2-9 son de tipo directo. Un pequeño artificio se requiere para la función $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por

$$F(x,y) = f(g(x,y), h(x), k(y))$$

donde $h,k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Para poder aplicar el teorema 2-9 se define $\bar{h},\bar{k} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ por

$$\bar{h}(x,y) = h(x) \qquad \bar{k}(x,y) = k(y).$$

Entonces

$$D_1\bar{h}(x,y) = h'(x) \qquad D_2\bar{h}(x,y) = 0,$$
$$D_1\bar{k}(x,y) = 0 \qquad D_2\bar{k}(x,y) = k'(y),$$

y se puede escribir

$$F(x,y) = f(g(x,y),\bar{h}(x,y),\bar{k}(x,y)).$$

Poniendo $a = (g(x,y),h(x),k(y))$, se obtiene

$$D_1F(x,y) = D_1f(a) \cdot D_1g(x,y) + D_2f(a) \cdot h'(x),$$
$$D_2F(x,y) = D_1f(a) \cdot D_2g(x,y) + D_3f(a) \cdot k'(y).$$

Es evidente, que podía haberse evitado la escritura efectiva de las funciones $\bar{h}$ y $\bar{k}$.

Problemas. **2 - 28.** Hallar expresiones para las derivadas parciales de las siguientes funciones:

(a) $F(x,y) = f(g(x)k(y),\ g(x) + h(y))$.
(b) $F(x,y,z) = f(g(x + y),\ h(y + z))$.
(c) $F(x,y,z) = f(x^y,y^z,z^x)$.
(d) $F(x,y) = f(x,g(x),h(x,y))$.

2 - 29. Sea f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. El límite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + tx) - f(a)}{t},$$

si existe, se indica por $D_xf(a)$, y se denomina la **derivada direccional** de f en a, en la dirección x.

(a) Probar que $D_{e_i}f(a) = D_if(a)$.

(b) Probar que $D_{tx}f(a) = tD_xf(a)$.

(c) Si f es diferenciable en a, probar que $D_xf(a) = Df(a)(x)$ y por tanto $D_{x+y}f(a) = D_xf(a) + D_yf(a)$.

2 - 30. Se supone f definida como en el problema 2-4. Probar que $D_xf(0,0)$ existe para todo x, pero si $g \neq 0$, entonces $D_{x+y}f(0,0) = D_xf(0,0) + D_yf(0,0)$ no es cierto para todo x e y.

2 - 31. Sea f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida como en el problema 1-26. Demostrar que $D_xf(0,0)$ existe para todo x, a pesar de no ser f continua en (0,0).

2 - 32. (a) Sea f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Probar que f es diferenciable en 0 pero f' no es continua en 0.
(b) Sea f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq 0, \\ 0 & (x,y) = 0. \end{cases}$$

Probar que f es diferenciable en (0,0) pero $D_i f$ no es continua en (0,0).

2 - 33. Probar que la continuidad de $D_j f^i$ en a puede ser eliminada de las hipótesis del teorema 2-8.

2 - 34. Una función f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es **homogénea** de grado m si $f(tx) = t^m f(x)$ para todo x. Si f es además diferenciable, probar que

$$\sum_{i=1}^{n} x^i D_i f(x) = m f(x).$$

Indicación: Si $g(t) = f(tx)$, hallar $g'(1)$.

2 - 35. Si f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es diferenciable y $f(0) = 0$, probar que existe g_i: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ tal que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i g_i(x).$$

Indicación: Si $h_x(t) = f(tx)$, entonces $f(x) = \int_0^1 h_x'(t)dt$.

FUNCIONES INVERSAS

Se supone que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es diferenciable con continuidad en un conjunto abierto que contiene a y $f'(a) \neq 0$. Si $f'(a) > 0$, existe un intervalo abierto V que contiene a tal que $f'(x) > 0$ para $x \in V$, y una afirmación análoga se cumple si $f'(a) < 0$. Así f es creciente (o decreciente) en V, y es por tanto 1-1 con una función inversa f^{-1} definida en un intervalo abierto W que contiene $f(a)$. Además no es difícil probar que f^{-1} es diferenciable, y para $y \in W$ que

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Una discusión análoga en dimensiones superiores es mucho más complicada, pero el resultado (Teorema 2-11) es muy importante. En primer lugar se prueba un lema simple.

2 - 10. Lema. *Sea $A \subset \mathbf{R}^n$ un rectángulo y sea $f : A \to \mathbf{R}^n$ diferenciable con continuidad. Si existe un número M tal que $|D_j f^i(x)| \leq M$ para todo x en el interior de A, entonces*

$$|f(x) - f(y)| \leq n^2 M|x - y|$$

para todo par $x,y \in A$.

Demostración. Se tiene

$$f^i(y) - f^i(x) = \sum_{j=1}^{n} [f^i(y^1, \ldots, y^j, x^{j+1}, \ldots, x^n) - f^i(y^1, \ldots, y^{j-1}, x^j, \ldots, x^n)].$$

Aplicando el teorema del valor medio, resulta

$$f^i(y^1, \ldots, y^j, x^{j+1}, \ldots, x^n) - f^i(y^1, \ldots, y^{j-1}, x^j, \ldots, x^n) = |y^j - x^j| \cdot D_j f^i(z_{ij})$$

para un cierto z_{ij}. La expresión del primer miembro es menor o igual que $M \cdot |y^j - x^j|$. Así

$$|f^i(y) - f^i(x)| \leq \sum_{j=1}^{n} |y^j - x^j| \cdot M \leq nM|y - x|$$

puesto que cada $|y^j - x^j| \leq |y - x|$. Finalmente

$$|f(y) - f(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f^i(y) - f^i(x)| \leq n^2 M \cdot |y - x|. \quad \blacksquare$$

2 - 11. Teorema. (Teorema de la función inversa.) *Se supone que* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *es diferenciable con continuidad en un conjunto abierto que contiene a, y* $\det f'(a) \neq 0$. *Entonces existe un conjunto abierto V que contiene a y un conjunto abierto W que contiene f(a) tales que* $f : V \to W$ *tiene una inversa continua* $f^{-1} : W \to V$ *que es diferenciable y para todo* $y \in W$ *satisface*

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

Demostración. Sea λ la aplicación lineal $Df(a)$, que es no singular, ya que $\det f'(a) \neq 0$. Se tiene $D(\lambda^{-1} \circ f)(a) = D(\lambda^{-1})(f(a)) \circ Df(a) = \lambda^{-1} \circ Df(a)$ luego es la aplicación lineal idéntica. Si el teorema es cierto para $\lambda^{-1} \circ f$, es evidentemente cierto para f. Por tanto, se puede suponer desde un principio que λ es la identidad. Así siempre que $f(a + h) = f(a)$, se tiene

$$\frac{|f(a + h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = \frac{|h|}{|h|} = 1.$$

Pero

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = 0.$$

Esto indica que no se puede tener $f(x) = f(a)$ para x suficientemente próximo a a, pero distinto de a. Por tanto, existe un rectángulo cerrado U que contiene a a en su interior, tal que

1. $f(x) \neq f(a)$ si $x \in U$ y $x \neq a$.

Puesto que f es diferenciable con continuidad en un conjunto abierto que contiene a a, se puede también suponer que

2. $\det f'(x) \neq 0$ para $x \in U$.
3. $|D_j f^i(x) - D_j f^i(a)| < 1/2n^2$ para todo i, j, y $x \in U$.

Obsérvese que (3) y el lema 2-10 aplicado a $g(x) = f(x) - x$ implica para $x_1, x_2 \in U$ que

$$|f(x_1) - x_1 - (f(x_2) - x_2)| \leq \tfrac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

Puesto que

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| - |f(x_1) - f(x_2)| &\leq |f(x_1) - x_1 - (f(x_2) - x_2)| \\ &\leq \tfrac{1}{2}|x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

se obtiene

4. $|x_1 - x_2| \leq 2|f(x_1) - f(x_2)|$ para $x_1, x_2 \in U$.

Pero f(frontera de U) es un conjunto compacto que, en virtud de (1), no contiene $f(a)$ (Fig. 2-3). Por tanto, existe un número $d > 0$ tal que $|f(a) - f(x)| \geq d$ para $x \in$ frontera de U. Sea $W = \{y: |y - f(a)| < d/2\}$. Si $y \in W$ y $x \in$ frontera de U, entonces

5. $|y - f(a)| < |y - f(x)|$.

Se quiere demostrar que para cada $y \in W$ existe un x único en el interior de U tal que $f(x) = y$. Para probar esto considérese la función $g: U \to \mathbf{R}$ definida por

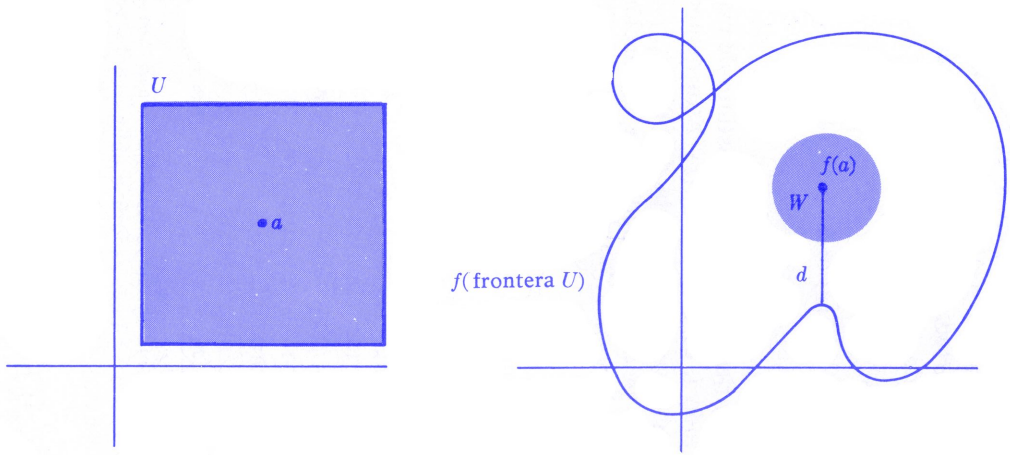


FIGURA 2-3

$$g(x) = |y - f(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y^i - f^i(x))^2.$$

Esta función es continua y por tanto tiene un mínimo en U. Si $x \in$ frontera de U, entonces, en virtud de (5), se tiene $g(a) < g(x)$. Por tanto, el mínimo de g *no* se presentará en la frontera de U. En virtud del teorema 2-6 existe un punto $x \in$ interior U tal que $D_j g(x) = 0$ para todo j, es decir

$$\sum_{i=1}^{n} 2(y^i - f^i(x)) \cdot D_j f^i(x) = 0 \quad \text{para todo } j.$$

En virtud de (2) la matriz $(D_j f^i(x))$ tiene determinante distinto de cero. Por tanto, ha de ser $y^i - f^i(x) = 0$ para todo i, es decir, $y = f(x)$. Esto demuestra la existencia de x. La unicidad es consecuencia inmediata de (4).

Si $V = (\text{interior } U) \cap f^{-1}(W)$, se ha demostrado que la función $f\colon V \to W$ tiene una inversa $f^{-1}\colon W \to V$. Se puede escribir (4) en la forma

6. $|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)| \leq 2|y_1 - y_2|$ para $y_1, y_2 \in W$.

Esto demuestra que f^{-1} es continua.

Sólo queda ahora por demostrar que f^{-1} es diferenciable. Sea $\mu = Df(x)$. Se desea demostrar que f^{-1} es diferenciable en $y = f(x)$ con derivada μ^{-1}. Como en la demostración del teorema 2-2, para $x_1 \in V$, se tiene

$$f(x_1) = f(x) + \mu(x_1 - x) + \varphi(x_1 - x),$$

donde

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{|\varphi(x_1 - x)|}{|x_1 - x|} = 0.$$

Por tanto

$$\mu^{-1}(f(x_1) - f(x)) = x_1 - x + \mu^{-1}(\varphi(x_1 - x)).$$

Puesto que cada $y_1 \in W$ es de la forma $f(x_1)$ para algún $x_1 \in V$, esto se puede escribir

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y) + \mu^{-1}(y_1 - y) - \mu^{-1}(\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))),$$

y por tanto será suficiente para demostrar que

$$\lim_{y_1 \to y} \frac{|\mu^{-1}(\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)))|}{|y_1 - y|} = 0.$$

Por tanto (problema 1-10) basta probar que

$$\lim_{y_1 \to y} \frac{|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))|}{|y_1 - y|} = 0.$$

Ahora

$$\frac{|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))|}{|y_1 - y|} = \frac{|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))|}{|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)|} \cdot \frac{|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)|}{|y_1 - y|}.$$

Puesto que f^{-1} es continua, $f^{-1}(y_1) \to f^{-1}(y)$ cuando $y_1 \to y$. Por tanto, el primer factor tiende a 0. Puesto que, en virtud de (6), el segundo factor es menor que 2, el producto también tiende a 0. ∎

Se observará que una función inversa f^{-1} puede existir aun siendo $\det f'(a) = 0$. Por ejemplo, si f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ está definida por $f(x) = x^3$ entonces $f'(0) = 0$, pero f tiene la función inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Sin embargo, una cosa es cierta: si $\det f'(a) = 0$, entonces f^{-1} no puede ser diferenciable en $f(a)$. Para probarlo obsérvese que $f \circ f^{-1}(x) = x$. Si f^{-1} fuera diferenciable en $f(a)$, la regla de la cadena daría $f'(a) \cdot (f^{-1})'(f(a)) = I$, y por consiguiente $\det f'(a) \cdot \det (f^{-1})'(f(a)) = 1$, lo que contradice a $\det f'(a) = 0$.

Problemas. **2 - 36.*** Sea $A \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto y f: $A \to \mathbf{R}^n$ una función 1-1 tal que $\det f'(x) \neq 0$ para todo x. Probar que $f(A)$ es un conjunto abierto y f^{-1}: $f(A) \to A$ es diferenciable. Probar también que $f(B)$ es abierto para cada conjunto abierto $B \subset A$.

2 - 37. (a) Sea f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una función diferenciable con continuidad. Probar que f no es 1-1. *Indicación:* Si, por ejemplo, $D_1 f(x,y) \neq 0$ para todo (x,y) en un conjunto abierto A, considérese g: $A \to \mathbf{R}^2$ definida por $g(x,y) = (f(x,y),y)$.

(b) Generalícese este resultado al caso de una función diferenciable con continuidad: f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ con $m < n$.

2 - 38. (a) Si f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisface $f'(a) \neq 0$ para todo $a \in \mathbf{R}$, probar que f es 1-1 (en todo $\mathbf{R}$).

(b) Definida f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ por $f(x,y) = (e^x \cos y,\ e^x \operatorname{sen} y)$. Probar que $\det f'(x,y) \neq 0$ para todo (x,y), pero f no es 1-1.

2-39. Utilícese la función f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

para probar que la continuidad de la derivada no puede ser eliminada de las hipótesis del teorema 2-11.

FUNCIONES IMPLÍCITAS

Se considera la función f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Si se elige (a,b) tal que $f(a,b) = 0$ y $a \neq 1, -1$, existen (Fig. 2-4) intervalos abiertos A que contiene a a y B que contiene a b con la siguiente propiedad: si $x \in A$, existe un único $y \in B$ con $f(x,y) = 0$. Se puede por tanto definir una función g: $A \to \mathbf{R}$ por la condición $g(x) \in B$ y $f(x,g(x)) = 0$ (si $b > 0$, como se indica en la Fig. 2-4, entonces $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$). Para la función f que se considera existe otro número b_1 tal que $f(a,b_1) = 0$. Habrá también un intervalo B_1 que contiene a b_1 tal

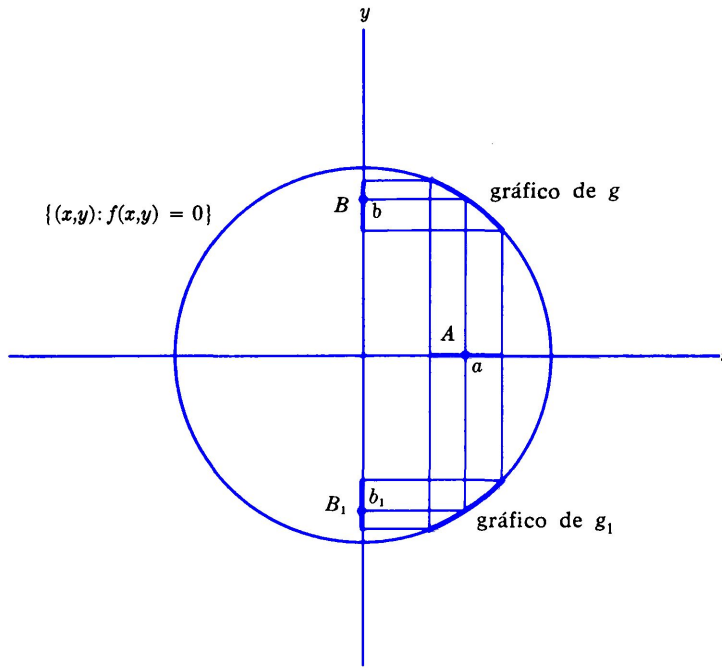


FIGURA 2-4

que, cuando $x \in A$, se tiene $f(x,g_1(x)) = 0$ para un único $g_1(x) \in B_1$ (aquí $g_1(x) = -\sqrt{1-x^2}$). Ambas g y g_1 son diferenciables. Estas funciones se dice que están definidas **implícitamente** por la ecuación $f(x,y) = 0$.

Si se elige $a = 1$ o -1 es imposible encontrar una tal función g definida en un intervalo abierto que contenga a a. Se desea encontrar un criterio simple para decidir cuando, en general, se puede hallar una tal función. Mas, en general, se puede plantear esta cuestión: Si f: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $f(a^1, \ldots, a^n, b) = 0$, ¿cuándo se puede encontrar, para cada $(x^1, \ldots, x^n)$ próximo a $(a^1, \ldots, a^n)$, una única y próxima a b tal que $f(x^1, \ldots, x^n, y) = 0$? Todavía más en general, se puede preguntar sobre la posibilidad de resolver m ecuaciones, dependientes de los parámetros $x^1, \ldots, x^n$, en m incógnitas: Si

$$f_i\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R} \qquad i = 1, \ldots, m$$

y

$$f_i(a^1, \ldots, a^n, b^1, \ldots, b^m) = 0 \qquad i = 1, \ldots, m,$$

¿cuándo se pueden encontrar, para cada $(x^1, \ldots, x^n)$ próximo a $(a^1, \ldots, a^n)$ un único $(y^1, \ldots, y^m)$ próximo a $(b^1, \ldots, b^m)$ que satisfaga $f_i(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) = 0$? La respuesta la da el siguiente

2 - 12. Teorema

(Teorema de la función implícita). *Se supone que* f: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ *es diferenciable con continuidad en un conjunto abierto que contiene* (a,b), *siendo* $f(a,b) = 0$. *Sea* M *la matriz* $m \times m$

$$(D_{n+j}f^i(a,b)) \qquad 1 \leq i, j \leq m.$$

Si $\det M \neq 0$, *existe un conjunto abierto* $A \subset \mathbf{R}^n$ *que contiene a* a *y un conjunto abierto* $B \subset \mathbf{R}^m$ *que contiene a* b, *con la siguiente propiedad: para cada* $x \in A$ *existe una única* $g(x) \in B$ *tal que* $f(x,g(x)) = 0$. *La función* g *es diferenciable.*

Demostración. Se define F: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ por $F(x,y) = (x,f(x,y))$. Entonces $\det F'(a,b) = \det M \neq 0$. En virtud del teorema 2-11 existe un conjunto abierto $W \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ que contiene a $F(a,b) = (a,0)$ y un conjunto abierto en $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ que contiene a (a,b), que se puede suponer de la forma $A \times B$, tal que F: $A \times B \to W$ tiene una inversa diferenciable h: $W \to A \times B$. Evidentemente h es de la forma $h(x,y) = (x,k(x,y))$ para una cierta función diferenciable k (puesto que F es de esta forma). Sea π: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ definida por $\pi(x,y) = y$; entonces $\pi \circ F = f$. Por tanto

$$f(x,k(x,y)) = f \circ h(x,y) = (\pi \circ F) \circ h(x,y) = \pi \circ (F \circ h)(x,y) = \pi(x,y) = y.$$

Así $f(x,k(x,0)) = 0$; en otras palabras se puede tomar $g(x) = k(x,0)$. ∎

Puesto que la función g se sabe que es diferenciable, es fácil encontrar sus derivadas. En efecto, puesto que $f^i(x,g(x)) = 0$, tomando D_j de los dos miembros, se tiene

$$0 = D_j f^i(x,g(x)) + \sum_{\alpha=1}^{m} D_{n+\alpha} f^i(x,g(x)) \cdot D_j g^\alpha(x) \qquad i,j = 1, \ldots, m.$$

Puesto que $\det M \neq 0$, estas ecuaciones se pueden resolver respecto a $D_j g^i(x)$. La solución dependerá de las diversas $D_j f^i(x,g(x))$, y por tanto de $g(x)$. Esto es inevitable, puesto que la función g no es única. Reconsiderando la función $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, se observa que dos posibles funciones que satisfacen $f(x,g(x)) = 0$ son $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Diferenciando $f(x,g(x)) = 0$, se tiene:

$$D_1 f(x,g(x)) + D_2 f(x,g(x)) \cdot g'(x) = 0,$$

o

$$2x + 2g(x) \cdot g'(x) = 0,$$
$$g'(x) = -x/g(x),$$

que se verifica tanto para $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ como para $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

Se puede dar una generalización del teorema 2-12, que será de aplicación en el capítulo 5.

2 - 13 Teorema. *Sea $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ diferenciable con continuidad en un conjunto abierto que contiene a a, donde $p \leq n$. Si $f(a) = 0$ y la matriz $m \times p, (D_i f^j(a))$ tiene rango p, entonces existe un conjunto abierto $A \subset \mathbf{R}^n$ y una función diferenciable $h: A \to \mathbf{R}^n$ con inversa diferenciable tal que*

$$f \circ h(x^1, \ldots, x^n) = (x^{n-p+1}, \ldots, x^n).$$

Demostración. Se puede considerar f como una función $f: \mathbf{R}^{n-p} \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$. Si $\det M \neq 0$, donde M es la matriz $p \times p, (D_{n-p+i} f^j(a))$, $1 \leq i, j \leq p$, se tiene entonces precisamente la situación considerada en la demostración del teorema 2-12, y como se ve en esta demostración, existe una h tal que $f \circ h(x^1, \ldots, x^n) = (x^{n-p+1}, \ldots, x^n)$.

En general, puesto que $(D_i f^j(a))$ tiene de rango p, existirán $i_1 < \ldots < i_p$ tales que la matriz $(D_i f^j(a))$ $1 \leq j \leq p$, $i = i_1, \ldots, i_p$ tendrá determinante distinto de cero. Si $g: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ permuta las x^i de manera que $g(x^1, \ldots, x^n) = (\ldots, x^{i_1}, \ldots, x^{i_p})$,

entonces $f \circ g$ es una función del tipo ya considerado, de manera que $((f \circ g) \circ k)(x^1, \ldots, x^n) = (x^{n-p+1}, \ldots, x^n)$ para cierta k. Se tiene $h = g \circ k$. ▮

Problemas. **2 - 40.** Utilizando el teorema de la función implícita, rehacer el problema 2-15(c).

2 - 41. Sea f: $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Para cada x se define g_x: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ por $g_x(y) = f(x,y)$. Se supone que para cada x existe una única y con $g'_x(y) = 0$; sea $c(x)$ esta y.

(a) Si $D_{2,2} f(x,y) \neq 0$ para todo (x,y), probar que c es diferenciable y

$$c'(x) = -\frac{D_{2,1}f(x,c(x))}{D_{2,2}f(x,c(x))}.$$

Indicación: $g_x'(y) = 0$ puede escribirse $D_2 f(x,y) = 0$.

(b) Probar que si $c'(x) = 0$, entonces para algún y se tiene

$$D_{2,1}f(x,y) = 0,$$
$$D_2 f(x,y) = 0.$$

(c) Sea $f(x,y) = x(y \log y - y) - y \log x$. Hallar

$$\max_{\frac{1}{2} \leq x \leq 2} \left(\min_{\frac{1}{2} \leq y \leq 1} f(x,y) \right).$$

NOTACIÓN

Esta sección es una discusión breve y no completamente imparcial de la notación clásica referente a las derivadas parciales.

La derivada parcial $D_1 f(x,y,z)$ se designa, entre los que siguen la notación clásica, por

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \quad \text{o} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{o} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \quad \text{o} \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)$$

o por cualquier otro símbolo análogo conveniente. Esta notación fuerza a escribir

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w)$$

en vez de $D_1 f(u,v,w)$, aunque el símbolo

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\bigg|_{(x,y,z)=(u,v,w)} \quad \text{o} \quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}(u,v,w)$$

o alguno análogo deba ser utilizado (y efectivamente habrá de usarse para una

expresión como $D_1(7,3,2)$). Notaciones similares se utilizan para D_2f y D_3f. Las derivadas de orden superior se designan por símbolos como

$$D_2D_1f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\, \partial x}.$$

Cuando $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, el símbolo ∂ automáticamente pasa a ser d; así

$$\frac{d \operatorname{sen} x}{dx}, \quad \text{no} \quad \frac{\partial \operatorname{sen} x}{\partial x}.$$

El mero enunciado del teorema 2-2 en notación clásica requiere la introducción de letras no necesarias. El cálculo usual para $D_1(f \circ (g,h))$ se expresa como sigue:

Si $f(u,v)$ es una función y $u = g(x,y)$ y $v = h(x,y)$, entonces

$$\frac{\partial f(g(x,y),\, h(x,y))}{\partial x} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

[El símbolo $\partial u/\partial x$ significa $\partial/\partial x\, g(x,y)$ y $\partial/\partial u\, f(u,v)$ significa $D_1f(u,v) = D_1f(g(x,y), h(x,y))$.] Esta ecuación se escribe con frecuencia simplemente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

¡Obsérvese que f significa cosas distintas en los dos miembros de la ecuación!

La notación df/dx ha sido siempre un poco tentadora y ha inspirado muchas (en general sin significación) definiciones de dx y df separadamente, cuyo único propósito es conseguir que la ecuación

$$df = \frac{df}{dx} \cdot dx$$

tenga sentido en el cálculo. Si $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ entonces df se *define* a la manera clásica por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

(cualquiera que sea el significado de dx y dy).

El capítulo 4 contiene definiciones rigurosas que permiten probar las igualdades anteriores como teoremas. Se plantea la cuestión de si estas definiciones modernas representan realmente una mejora respecto al formalismo clásico; esto lo decidirá el lector por sí mismo.

3

Integración

DEFINICIONES BÁSICAS

La definición de integral de una función $f: A \to \mathbf{R}$, donde $A \subset \mathbf{R}^n$ es un rectángulo cerrado, es análoga a la de integral ordinaria, de manera que se estudiará rápidamente.

Recuérdese que una partición P de un intervalo cerrado $[a,b]$ es una sucesión $t_0, \ldots, t_k$, donde $a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k = b$. La partición P divide el intervalo $[a,b]$ en k subintervalos $[t_{i-1},t_i]$. Una **partición** de un rectángulo $[a_1b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n]$ es una colección $P = (P_1, \ldots, P_n)$, donde cada P_i es una partición del intervalo $[a_i,b_i]$. Supóngase, por ejemplo, que $P_1 = t_0, \ldots, t_k$ es una partición de $[a_1,b_1]$ y $P = s_0, \ldots, s_l$ es una partición de $[a_2,b_2]$. Entonces la partición $P=(P_1,P_2)$ de $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ divide el rectángulo cerrado $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ en $k \cdot l$ subrectángulos de la forma $[t_{i-1},t_i] \times [s_{j-1},s_j]$. En general, si P_i divide $[a_i,b_i]$ en N_i subintervalos, entonces $P=(P_1, \ldots, P_n)$ divide $[a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n]$ en $N=N_1 \cdot \ldots \cdot N_n$ subrectángulos. Estos subrectángulos se denominarán **subrectángulos de la partición** P.

Supóngase ahora que A es un rectángulo, $f: A \to \mathbf{R}$ es una función acotada, y P es una partición de A. Para cada subrectángulo S de la partición sea

$$m_S(f) = \inf\{f(x): x \in S\},$$
$$M_S(f) = \sup\{f(x): x \in S\},$$

y sea $v(S)$ el volumen de S (el **volumen** de un rectángulo $[a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n]$, y también de $(a_1b_1) \times \ldots \times (a_nb_n)$, se define por $(b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n - b_n)$). Las **sumas inferior y superior** de f correspondientes a la partición P están definidas por

$$L(f,P) = \sum_S m_S(f) \cdot v(S) \quad \text{y} \quad U(f,P) = \sum_S M_S(f) \cdot v(S).$$

Evidentemente $L(f,P) \leq U(f,P)$, pero también es cierta una afirmación más fuerte (3-2).

3 - 1. Lema. *Se supone la partición P' más fina que la P (es decir, cada subrectángulo de P' está contenido en un subrectángulo de P). Entonces*

$$L(f,P) \leq L(f,P') \qquad y \qquad U(f,P') \leq U(f,P).$$

Demostración. Cada subrectángulo S de P se divide entre varios subrectángulos $S_1, \ldots, S_\alpha$ de P', de manera que $v(S) = v(S_1) + \ldots + v(S_\alpha)$. Ahora bien, es $m_S(f) \leq m_{S_i}(f)$, puesto que los valores de $f(x)$ para $x \in S$ incluyen todos los valores de $f(x)$ para $x \in S_i$ (y posiblemente otros menores). Así

$$\begin{aligned} m_S(f) \cdot v(S) &= m_S(f) \cdot v(S_1) + \cdots + m_S(f) \cdot v(S_\alpha) \\ &\leq m_{S_1}(f) \cdot v(S_1) + \cdots + m_{S_\alpha}(f) \cdot v(S_\alpha). \end{aligned}$$

La suma, para todo S, de los términos del primer miembro de la desigualdad es $L(f,P)$, mientras que la suma de todos los miembros del segundo miembro es $L(f,P')$. Por tanto, $L(f,P) \leq L(f,P')$. La demostración para sumas superiores es análoga. ∎

3 - 2. Corolario. *Si P y P' son dos particiones cualesquiera, entonces $L(f,P') \leq \leq U(f,P)$.*

Demostración. Sea P'' una partición más fina a la vez que P y que P'. (Por ejemplo, sea $P'' = (P_1'' \ldots, P_n'')$, donde P_i'' es una partición de $[a_i,b_i]$ más fina a la vez que P_i y que P_i'.) Entonces

$$L(f,P') \leq L(f,P'') \leq U(f,P'') \leq U(f,P). \quad ∎$$

Se sigue del corolario 3-2 que el extremo superior de las sumas inferiores para f es menor o igual al extremo inferior de las sumas superiores para f. Una función $f : A \to \mathbf{R}$ se denomina **integrable** en el rectángulo A si f es acotada y $\sup \{L(f,P)\} = \inf \{U(f,P)\}$. Este número común se designa por $\int_A f$, y se denomina la **integral** de f sobre A. Con frecuencia se utiliza la notación $\int_A f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n$. Si $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, donde $a \leq b$, entonces $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$. Un criterio sencillo pero útil de integrabilidad lo da el siguiente

3 - 3. Teorema. *Una función acotada $f : A \to \mathbf{R}$ es integrable si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de A tal que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.*

Demostración. Si se cumple esta condición, es claro que sup $\{L(f,P)\} = \inf \{U(f,P)\}$ y f es integrable. Por otra parte, si f es integrable de manera que sup $\{L(f,P)\} = \inf \{U(f,P)\}$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existen particiones P y P' con $U(f,P) - L(f,P') < \varepsilon$. Si P'' es más fina a la vez que P y P', se deduce del lema 3-1 que $U(f,P'') - L(f,P'') \leq U(f,P) - L(f,P') < \varepsilon$. ∎

En las secciones siguientes se caracterizarán las funciones integrables y se darán métodos para calcular integrales. De momento se darán ejemplos de dos funciones, una integrable y otra no.

1. Sea $f : A \to \mathbf{R}$ una función constante, $f(x) = c$. Entonces para cada partición P y subrectángulo S se tiene $m_S(f) = M_S(f) = c$, de manera que $L(f,P) = U(f,P) = \Sigma_S c \cdot v(S) = c \cdot v(A)$. Por tanto, $\int_A f = c \cdot v(A)$.

2. Sea f: $[0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Si P es una partición, entonces cada subrectángulo S contiene puntos (x,y) con x racional, y también puntos (x,y) con x irracional. Por tanto, $m_S(f) = 0$ y $M_S(f) = 1$, de manera que

$$L(f,P) = \sum_S 0 \cdot v(S) = 0$$

y

$$U(f,P) = \sum_S 1 \cdot v(S) = v([0,1] \times [0,1]) = 1.$$

Por tanto, f no es integrable.

Problemas. **3 - 1.** Sea f: $[0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Probar que f es integrable y que $\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 1/2$.

3 - 2. Sea f: $A \to \mathbf{R}$ integrable y sea $g = f$ excepto en un conjunto finito de puntos. Probar que g es integrable y $\int_A f = \int_A g$.

3 - 3. Sean f,g: $A \to \mathbf{R}$ integrables.

(a) Para cada partición P de A y subrectángulo S, probar que

$$m_S(f) + m_S(g) \leq m_S(f+g) \qquad \text{y} \qquad M_S(f+g) \leq M_S(f) + M_S(g)$$

y por tanto

$$L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g)$$

y
$$U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P).$$

(b) Probar que $f+g$ es integrable y $\int_A f+g = \int_A f + \int_A g$.

(c) Para cada constante c, probar que $\int_A cf = c\int_A f$.

3-4. Sea $f\colon A \to \mathbf{R}$ y sea P una partición de A. Probar que f es integrable si y sólo si para cada subrectángulo S la función $f|S$, o sea la restricción de f a S, es integrable, y en este caso $\int_A f = \sum_S \int_S f|S$.

3-5. Sean $f,g\colon A \to \mathbf{R}$ integrables y supóngase $f \leq g$. Probar que $\int_A f \leq \int_A g$.

3-6. Si $f\colon A \to \mathbf{R}$ es integrable, probar que $|\int_A f| \leq \int_A |f|$.

3-7. Sea $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \text{ irracional,} \\ 0 & x \text{ racional, } y \text{ irracional,} \\ 1/q & x \text{ racional, } y = p/q \text{ irreducible.} \end{cases}$$

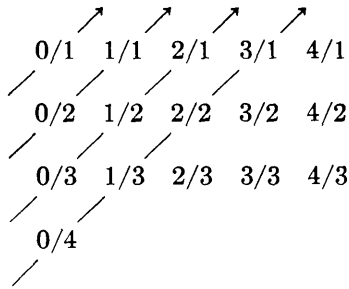
Probar que f es integrable y $\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 0$.

MEDIDA CERO Y CONTENIDO CERO

Un subconjunto A de $\mathbf{R}^n$ tiene **medida** 0 (n-dimensional) si para cada $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento $\{U_1,U_2,U_3,\ldots\}$ de A por rectángulos cerrados tal que $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$. Es evidente (pero sin embargo útil recordarlo) que si A tiene medida 0 y $B \subset A$, entonces B tiene medida 0. El lector puede comprobar que en la definición de medida 0 pueden utilizarse rectángulos abiertos en vez de rectángulos cerrados.

Un conjunto con sólo un número finito de puntos tiene evidentemente medida 0. Si A tiene infinitos puntos que pueden ordenarse formando una sucesión $a_1,a_2,a_3,\ldots$, entonces A también tiene medida 0, pues para cada $\varepsilon > 0$ se puede elegir U_i que sea un rectángulo cerrado que contenga a_i con $v(U_i) < \varepsilon/2^i$. Entonces $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon/2^i = \varepsilon$.

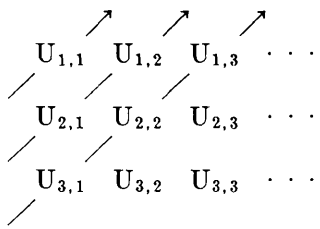
El conjunto de todos los números racionales comprendidos entre 0 y 1 es un ejemplo importante y algo sorprendente de un conjunto infinito con cuyos elementos se pueden formar una sucesión. Para ver que es posible, escríbanse las fracciones del siguiente cuadro en el orden indicado por las flechas (suprímanse las repeticiones y los números mayores que 1):



Se puede dar una generalización importante de esta idea.

3 - 4. Teorema. *Si* $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ *y cada* A_i *tiene medida* 0, *entonces* A *tiene medida* 0.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que A_i tiene medida 0, existe un recubrimiento $\{U_{i,1}, U_{i,2}, U_{i,3}, \ldots\}$ de A_i por rectángulos cerrados tal que $\Sigma_{j=1}^{n} v(U_{i,j}) < \varepsilon/2^i$. Entonces la colección de todos los $U_{i,j}$ es un recubrimiento de A. Considerando el cuadro



se ve que con esta colección se puede formar una sucesión $V_1, V_2, V_3, \ldots$ Evidentemente $\Sigma_{i=1}^{n} v(V_i) < \Sigma_{i=1}^{\infty} \varepsilon/2^i = \varepsilon$ ∎

Un subconjunto A de $\mathbf{R}^n$ tiene **contenido** (n-dimensional) 0 si para cada $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento *finito* $\{U_1, \ldots, U_n\}$ de A por rectángulos cerrados tal que $\Sigma_{i=1}^{n} v(U_i) < \varepsilon$. Si A tiene contenido 0, entonces A tiene evidentemente medida 0. También aquí pueden utilizarse rectángulos abiertos en vez de rectángulos cerrados en la definición.

3 - 5. Teorema. *Si* $a < b$, *entonces* $[a,b] \subset \mathbf{R}$ *no tiene contenido* 0. *Efectivamente, si* $\{U_1, \ldots, U_n\}$ *es un recubrimiento finito de* $[a,b]$ *por intervalos cerrados, entonces* $\Sigma_{i=1}^{n} v(U_i) \geq b - a$.

Demostración. La demostración es por inducción respecto a n; es evidente cuando $n = 1$. Supóngase el teorema cierto para recubrimientos con n intervalos y sea

$\{U_1, \ldots, U_{n+1}\}$ un recubrimiento de $[a,b]$ por intervalos cerrados. Se puede suponer (cambiando los subíndices si es necesario) que $a \in U_1$. Entonces $U_1 = [\alpha,\beta]$ es tal que $\alpha \leq a \leq \beta$. Si $\beta \geq b$, entonces $v(U_1) \geq b - a$. Si $\beta < b$, entonces $[\beta,b]$ es recubierto por $\{U_2, \ldots, U_n\}$. Por tanto $\sum_{i=2}^{n+1} v(U_i) \geq \beta - b$ y por tanto $\sum_{i=1}^{n+1} v(U_i) \geq (\beta - a) + (b - \beta) = b - a$. ∎

Si $a < b$, es también cierto que $[a,b]$ no tiene medida 0. Esto es consecuencia de

3-6. Teorema. *Si A es compacto y tiene medida 0, entonces A tiene contenido 0.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que A tiene medida 0, existe un recubrimiento $\{U_1, U_2, \ldots\}$ de A por rectángulos abiertos tales que $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$. Puesto que A es compacto, un número finito $U_1, \ldots, U_n$ de las U_i recubre también A y seguramente $\sum_{i=1}^{n} v(U_i) < \varepsilon$. ∎

La conclusión del teorema 3-6 es falsa si A no es compacto. Por ejemplo, sea A el conjunto de todos los números racionales entre 0 y 1; entonces A tiene medida 0. Supóngase, sin embargo, que $\{[a_1,b_1], \ldots, [a_n,b_n]\}$ recubre A. Entonces A está contenido en el conjunto cerrado $[a_1,b_1] \cup \ldots \cup [a_n,b_n]$, y por tanto $[0,1] \subset [a_1,b_1] \cup \ldots \cup [a_n,b_n]$. Se deduce del teorema 3-5 que $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \geq 1$ para todo recubrimiento de este tipo, y por consiguiente A no tiene contenido 0.

Problemas. **3-8.** Demostrar que $[a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n]$ no tiene contenido 0 si $a_i < b_i$ para cada i.

3-9. (a) Probar que un conjunto no acotado no puede tener contenido 0.

(b) Dar un ejemplo de un conjunto cerrado de medida 0 que no tenga contenido 0.

3-10. (a) Si C es un conjunto de contenido 0, probar que la frontera de C tiene contenido 0.

(b) Dar un ejemplo de un conjunto acotado C de medida 0 tal que la frontera de C no tenga medida 0.

3-11. Sea A el conjunto del problema 1-18. Si $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < 1$, probar que la frontera de A no tiene medida 0.

3-12. Sea f: $[a,b] \to \mathbf{R}$ una función creciente. Probar que $\{x$: f es discontinua en $x\}$ tiene medida 0. *Indicación:* Utilícese el problema 1-30 para probar que $\{x: o(f,x) > 1/n\}$ es finito para cada entero n.

3-13.* (a) Probar que con la colección de todos los rectángulos $[a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n]$ con todos los a_i y b_i racionales se puede formar una sucesión.

(b) Si $A \subset \mathbf{R}^n$ es un conjunto cualquiera y $\mathcal{O}$ es un recubrimiento abierto de A, probar que existe una sucesión $U_1, U_2, U_3, \ldots$ de conjuntos de $\mathcal{O}$ que también recubren A. *Indicación:* Para cada $x \subset A$ existe un rectángulo $B = [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n]$ con todos los a_i y b_i racionales tales que $x \in B \subset U$ para algún $U \in \mathcal{O}$.

FUNCIONES INTEGRABLES

Recuérdese que $o(f,x)$ indica la oscilación de f en x.

3 - 7. Lema. *Sea A un rectángulo cerrado y sea $f: A \to \mathbf{R}$ una función acotada tal que $o(f,x) < \varepsilon$ para todo $x \in A$. Entonces existe una partición P de A con $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon \cdot v(A)$.*

Demostración. Para cada $x \in A$ existe un rectángulo cerrado U_x que contiene x en su interior, y tal que $M_{U_x}(f) - m_{U_x}(f) < \varepsilon$. Puesto que A es compacto, un número finito $U_{x_1} \ldots, U_{x_n}$ de los conjuntos U_x recubre A. Sea P una partición de A tal que cada subrectángulo S de P está contenido en algún U_{x_i}. Entonces $M_S(f) - m_S(f) < \varepsilon$ para cada subrectángulo S de P, de manera que $U(f,P) - L(f,P) = \Sigma_S\, [M_S(f) - m_S(f)] \cdot v(S) < \varepsilon \cdot v(A)$. ∎

3 - 8. Teorema. *Sea A un rectángulo cerrado y $f: A \to \mathbf{R}$ una función acotada. Sea $B = \{x: f$ no es continua en $x\}$. Entonces f es integrable si y sólo si B es un conjunto de medida 0.*

Demostración. Supóngase primero que B tiene medida 0. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $B_\varepsilon = \{x: o(f,x) \geq \varepsilon\}$. Entonces $B_\varepsilon \subset B$, de manera que B_ε tiene medida 0. Puesto que (teorema 1-11) B_ε es compacto, B_ε tiene contenido 0. Así existe un conjunto finito $U_1, \ldots, U_n$ de rectángulos cerrados, cuyos interiores recubren B_ε, tales que

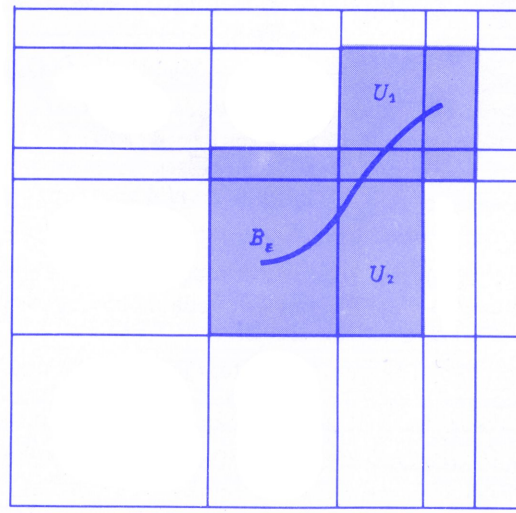


FIGURA 3-1

Los rectángulos sombreados están en $\mathcal{S}_1$.

$\Sigma_{i=1}^{n} v(U_i) < \varepsilon$. Sea P una partición de A tal que cada subrectángulo S de P pertenece a uno de los dos grupos (ver Fig. 3-1):

(1) $\mathcal{S}_1$, que consiste en los subrectángulos S, tales que $S \subset U_i$ para algún i.
(2) $\mathcal{S}_2$, que consiste en los subrectángulos S con $S \cap B_\varepsilon = \varnothing$.

Sea $|f(x)| < M$ para $x \in A$. Entonces $M_S(f) - m_S(f) < 2M$ para cada S. Por tanto

$$\sum_{S \in \mathcal{S}_1} [M_S(f) - m_S(f)] \cdot v(S) < 2M \sum_{i=1}^{n} v(U_i) < 2M\varepsilon.$$

Ahora bien, si $S \in \mathcal{S}_2$, entonces $o(f,x) < \varepsilon$ para $x \in S$. El lema 3-7 implica que existe una partición P' más fina que P tal que

$$\sum_{S' \subset S} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot v(S') < \varepsilon \cdot v(S)$$

para $S \in \mathcal{S}_2$. Entonces

$$\begin{aligned} U(f,P') - L(f,P') &= \sum_{S' \subset S \in \mathcal{S}_1} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot v(S') \\ &\quad + \sum_{S' \subset S \in \mathcal{S}_2} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot v(S') \\ &< 2M\varepsilon + \sum_{S \in \mathcal{S}_2} \varepsilon \cdot v(S) \\ &\leq 2M\varepsilon + \varepsilon \cdot v(A). \end{aligned}$$

Puesto que M y $v(A)$ son fijos, esto muestra que se puede encontrar una partición P' con $U(f,P') - L(f,P')$ tan pequeña como se desee. Por tanto f es integrable.

Supóngase, recíprocamente, que f sea integrable. Puesto que $B = B_1 \cup B_{\frac{1}{2}} \cup B_{\frac{1}{3}} \cup \ldots$ bastará demostrar (teorema 3-4) que cada $B_{1/n}$ tiene medida 0. En efecto, se demostrará que cada $B_{1/n}$ tiene contenido 0 (puesto que $B_{1/n}$ es compacto, es efectivamente equivalente).

Si $\varepsilon > 0$, sea P una partición de A tal que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon\, n$. Sea $\mathcal{S}$ la colección de subrectángulos S de P que cortan $B_{1/n}$. Entonces $\mathcal{S}$ es un recubrimiento de $B_{1/n}$. Pero si $S \in \mathcal{S}$, entonces $M_S(f) - m_S(f) \geq 1/n$. Por tanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\cdot\sum_{S\in\mathcal{S}} v(S) &\leq \sum_{S\in\mathcal{S}} [M_S(f) - m_S(f)]\cdot v(S)\\ &\leq \sum_{S} [M_S(f) - m_S(f)]\cdot v(S)\\ &< \frac{\varepsilon}{n},\end{aligned}$$

y por consiguiente $\Sigma_{S\in\mathcal{S}} v(S) < \varepsilon$. ∎

Hasta ahora sólo se han considerado integrales sobre rectángulos. Integrales sobre otros conjuntos se reducen fácilmente a este tipo. Si $C \subset \mathbf{R}^n$, la **función característica** χ_C de C se define por

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 0 & x \notin C, \\ 1 & x \in C. \end{cases}$$

Si $C \subset A$ para algún rectángulo cerrado A y $f: A \to \mathbf{R}$ es acotada, entonces $\int_C f$ se define como $\int_A f \cdot \chi_C$, supuesto que $f \cdot \chi_C$ es integrable. Esto ocurre ciertamente (problema 3-14) si f y χ_C son integrables.

3-9. Teorema. *La función $\chi_C: A \to \mathbf{R}$ es integrable si y sólo si la frontera de C tiene medida 0 (y por tanto contenido 0).*

Demostración. Si x pertenece al interior de C, entonces existe un rectángulo abierto U con $x \in U \subset C$. Así $\chi_C = 1$ en U y χ_C es evidentemente continua en x. Análogamente, si x pertenece al exterior de C, existe un rectángulo abierto U con $x \in U \subset \mathbf{R}^n - C$. Por tanto, $\chi_C = 0$ en U y χ_C es continua en x. Finalmente, si x pertenece a la frontera de C, entonces para cada rectángulo abierto U que contiene x, existe un $y_1 \in U \cap C$ tal que $\chi_C(y_1) = 1$ y existe un $y_2 \in U \cap (\mathbf{R}^n - C)$, tal que $\chi_C(y_2) = 0$. Por tanto, χ_C no es continua en x. Así $\{x: \chi_C$ no es continua en $x\}$ = frontera C, y el resultado es consecuencia del teorema 3-8. ∎

Un conjunto C cuya frontera tiene medida 0 se denomina **medible-Jordan.** La integral $\int_C 1$ se denomina **contenido** (n-dimensional) de C, o **volumen** (n-dimensional) de C. Naturalmente que un volumen unidimensional se acostumbra a llamar **longitud,** y un volumen bidimensional, **área.**

El problema 3-11 muestra que un conjunto abierto C puede no ser medible-Jordan, de manera que $\int_C f$ no está necesariamente definida aun cuando C sea abierto y f continua. Esta situación desagradable será pronto rectificada.

Problemas. **3 - 14.** Probar que si f,g: $A \to \mathbf{R}$ son integrables, también lo es $f \cdot g$.

3 - 15. Probar que si C tiene contenido 0, entonces $C \subset A$ para algún rectángulo cerrado A y C es medible Jordan y $\int_A \chi_C = 0$.

3 - 16. Dar un ejemplo de un conjunto acotado C de medida 0 tal que $\int_A \chi_C$ no exista.

3 - 17. Si C es un conjunto acotado de medida 0 y $\int_A \chi_C$ existe, probar que $\int_A \chi_C = 0$. *Indicación:* Probar que $L(f,P) = 0$ para toda partición P. Utilícese el problema 3-8.

3 - 18. Si f: $A \to \mathbf{R}$ es no negativa y $\int_A f = 0$, probar que $\{x: f(x) \neq 0\}$ tiene medida 0. *Indicación:* Probar que $\{x: f(x) > 1/n\}$ tiene contenido 0.

3 - 19. Sea A el conjunto abierto del problema 3-11. Probar que si $f = \chi_A$ excepto en un conjunto de medida 0, entonces f es no integrable en $[0,1]$.

3 - 20. Probar que una función creciente f: $[a,b] \to \mathbf{R}$ es integrable en $[a,b]$.

3 - 21. Si A es un rectángulo cerrado, probar que $C \subset A$ es medible Jordan si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de A tal que $\sum_{S \in \mathcal{S}_1} v(S) - \sum_{S \in \mathcal{S}_2} v(S) < \varepsilon$, donde $\mathcal{S}_1$ está formado por todos los subrectángulos que cortan a C y $\mathcal{S}_2$ por todos los subrectángulos contenidos en C.

3 - 22. Si A es un conjunto medible Jordan y $\varepsilon > 0$, probar que existe conjunto compacto medible Jordan $C \subset A$ tal que $\int_A \chi_{A-C} < \varepsilon$.

TEOREMA DE FUBINI

El problema de calcular integrales se resuelve, en cierta forma, por el teorema 3-10, que reduce el cálculo de integrales en un rectángulo cerrado en $\mathbf{R}^n$, $n > 1$, al cálculo de integrales sobre intervalos cerrados en $\mathbf{R}$. De suficiente importancia para darle una designación especial, este teorema se acostumbra a llamar teorema de Fubini, pues se puede considerar como caso especial de un teorema demostrado por Fubini mucho después de ser conocido el teorema 3-10.

La idea que encierra el teorema se ilustra mejor (Fig. 3-2) considerando una función continua positiva f: $[a,b] \times [c,d] \to \mathbf{R}$. Sea $t_0, \ldots, t_n$ una partición de $[a,b]$ y se divide $[a,b] \times [c,d]$ en n bandas por medio de los segmentos $\{t_i\} \times [c,d]$. Si g_x se define por $g_x(y) = f(x,y)$, entonces el área de la región debajo del gráfico de f y por encima de $\{x\} \times [c,d]$ es

$$\int_c^d g_x = \int_c^d f(x,y)dy.$$

El volumen de la región debajo del gráfico de f y por encima de $[t_{i-1},t_i] \times [c,d]$ es por tanto aproximadamente igual a $(t_i - t_{i-1}) \cdot \int_c^d f(x,y)dy$, para cada $x \in [t_{i-1},t_i]$. Así

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{[t_{i-1},t_i]\times[c,d]} f$$

es aproximadamente $\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \cdot \int_c^d f(x_i,y)dy$, donde x_i está en $[t_{i-1},t_i]$. Por

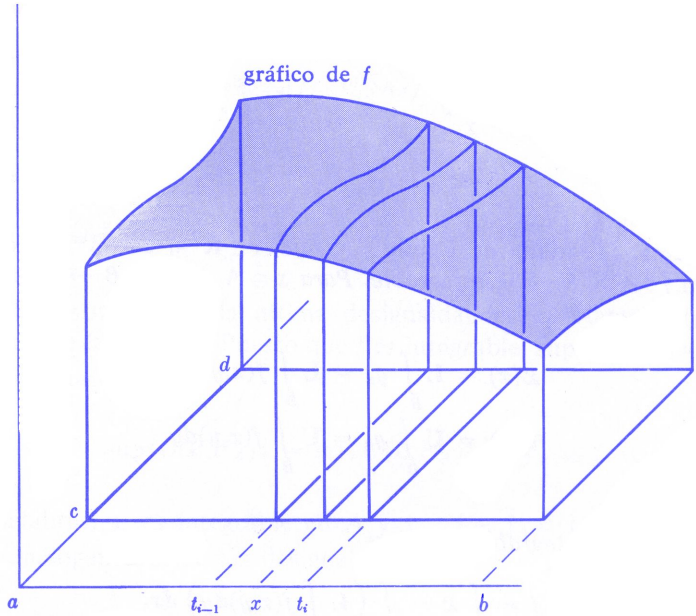


FIGURA 3-2

otra parte, sumas análogas a ésta aparecen en la definición de $\int_a^b(\int_c^d f(x,y)dy)dx$. Así, si h se define por $h(x) = \int_c^d g_x = \int_c^d f(x,y)dy$, es razonable esperar que h sea integrable en $[a,b]$ y que

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b h = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx.$$

Esto efectivamente resultará cierto si f es continua, pero en el caso general se presentan dificultades. Supóngase por ejemplo que el conjunto de discontinuidades de f es $\{x_0\} \times [c,d]$ para algún $x_0 \in [a,b]$. Entonces f es integrable en $[a,b] \times [c,d]$ pero $h(x_0) = \int_c^d f(x_0,y)dy$ puede muy bien no estar definida. El enunciado del teorema de Fubini, sin embargo, tiene una apariencia algo extraña, y vendrá seguido de una serie de observaciones sobre varios casos especiales en los que son posibles enunciados más simples.

Se precisará un poco la terminología. Si $f\colon A \longrightarrow \mathbf{R}$ es una función acotada en un rectángulo cerrado, entonces, tanto si f es integrable como si no lo es, el extremo superior de todas las sumas inferiores y el extremo inferior de todas

las sumas superiores, existen. Se denominan integrales **inferior** y **superior** de f en A, y se indican por

$$\mathbf{L}\int_A f \qquad \text{y} \qquad \mathbf{U}\int_A f,$$

respectivamente.

3 - 10. Teorema. (Teorema de Fubini.) *Sean $A \subset \mathbf{R}^n$ y $B \subset \mathbf{R}^m$ rectángulos cerrados, y sea $f : A \times B \to \mathbf{R}$ integrable. Para $x \in A$ sea $g_x : B \to \mathbf{R}$ definida por $g_x(y) = f(x,y)$ y sea*

$$\mathfrak{L}(x) = \mathbf{L}\int_B g_x = \mathbf{L}\int_B f(x,y)dy,$$
$$\mathfrak{U}(x) = \mathbf{U}\int_B g_x = \mathbf{U}\int_B f(x,y)dy.$$

Entonces $\mathfrak{L}$ y $\mathfrak{U}$ son integrables en A y

$$\int_{A\times B} f = \int_A \mathfrak{L} = \int_A \left(\mathbf{L}\int_B f(x,y)dy\right) dx,$$
$$\int_{A\times B} f = \int_A \mathfrak{U} = \int_A \left(\mathbf{U}\int_B f(x,y)dy\right) dx.$$

(Las integrales del segundo miembro se denominan **integrales iteradas** *de f.*)

Demostración. Sea P_A una partición de A y P_B una partición de B. Juntas originan una partición P de $A \times B$ en la cual cada subrectángulo S es de la forma $S_A \times S_B$ donde S_A es un subrectángulo de la partición P_A, y S_B es un subrectángulo de la partición P_B. Así

$$L(f,P) = \sum_S m_S(f)\cdot v(S) = \sum_{S_A,S_B} m_{S_A\times S_B}(f)\cdot v(S_A\times S_B)$$
$$= \sum_{S_A}\left(\sum_{S_B} m_{S_A\times S_B}(f)\cdot v(S_B)\right)\cdot v(S_A).$$

Ahora bien, si $x \in S_A$, entonces evidentemente $m_{S_A\times S_B}(f) \leq m_{S_B}(g_x)$. Por consiguiente, para $x \in S_A$ se tiene

$$\sum_{S_B} m_{S_A\times S_B}(f)\cdot v(S_B) \leq \sum_{S_B} m_{S_B}(g_x)\cdot v(S_B) \leq \mathbf{L}\int_B g_x = \mathfrak{L}(x).$$

Por tanto,

$$\sum_{S_A} \left(\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \cdot v(S_B) \right) \cdot v(S_A) \leq L(\mathfrak{L}, P_A).$$

Así se obtiene

$$L(f,P) \leq L(\mathfrak{L},P_A) \leq U(\mathfrak{L},P_A) \leq U(\mathfrak{U},P_A) \leq U(f,P),$$

donde la demostración de la última desigualdad es exactamente análoga a la demostración de la primera. Puesto que f es integrable, $\sup \{L(f,P)\} = \inf \{U(f,P)\} = \int_{A\times B} f$. Por tanto.

$$\sup\{L(\mathfrak{L},P_A)\} = \inf\{U(\mathfrak{L},P_A)\} = \int_{A\times B} f.$$

En otras palabras, $\mathfrak{L}$ es integrable en A y $\int_{A\times B} f = \int_A \mathfrak{L}$. La proposición para $\mathfrak{U}$ se deduce análogamente de las desigualdades

$$L(f,P) \leq L(\mathfrak{L},P_A) \leq L(\mathfrak{U},P_A) \leq U(\mathfrak{U},P_A) \leq U(f,P). \quad \blacksquare$$

Observaciones. 1. Una demostración análoga prueba que

$$\int_{A\times B} f = \int_B \left(\mathbf{L} \int_A f(x,y)\,dx \right) dy = \int_B \left(\mathbf{U} \int_A f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Estas integrales son las *integrales iteradas* de f en orden inverso de las del teorema. Como se ve en muchos problemas, la posibilidad de permutar el orden de las integrales iteradas tiene muchas consecuencias.

2. En la práctica se presenta frecuentemente el caso de ser integrable cada g_x, de manera que $\int_{A\times B} f = \int_A (\int_B f(x,y)dy)dx$. Esto ocurre ciertamente si f es continua.

3. La mayor irregularidad que se presenta en los casos corrientes es que g_x no sea integrable para un número finito de $x \in A$. En este caso $\mathfrak{L}(x) = \int_B f(x,y)dy$ salvo en este número finito de x. Puesto que $\int_A \mathfrak{L}$ no altera si $\mathfrak{L}$ se define de nuevo en un número finito de puntos se puede escribir $\int_{A\times B} f = \int_A (\int_B f(x,y)dy)dx$, siempre que $\int_B f(x,y)dy$ se defina arbitrariamente, por ejemplo, dándole el valor 0, cuando no existe.

4. Hay casos donde esto no se puede hacer y el teorema 3-10 ha de aplicarse tal como se ha establecido. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional e } y \text{ irracional} \\ 1 - 1/q & \text{si } x = p/q \text{ es irreducible e } y \text{ racional.} \end{cases}$$

Entonces f es integrable y $\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 1$. Ahora bien, $\int_0^1 f(x,y)dy = 1$ si x es irracional y no existe si x es racional. Por tanto h no es integrable si se pone $h(x) = \int_0^1 f(x,y)dx$ igual a 0 cuando la integral no existe.

5. Si $A = [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n]$ y $f : A \to \mathbf{R}$ es suficientemente cómoda, se puede aplicar el teorema de Fubini repetidamente para obtener

$$\int_A f = \int_{a_n}^{b_n} \left(\cdots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x^1, \ldots, x^n)dx^1 \right) \cdots \right) dx^n.$$

6. Si $C \subset A$, el teorema de Fubini se puede utilizar para calcular $\int_C f$, puesto que es por definición $\int_A \chi_C f$. Supóngase, por ejemplo, que

$$C = [-1,1] \times [-1,1] - \{(x,y) : |(x,y)| < 1\}.$$

Entonces

$$\int_C f = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y) \cdot \chi_C(x,y)dy \right) dx.$$

Ahora

$$\chi_C(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > \sqrt{1-x^2} \text{ o } y < -\sqrt{1-x^2}, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por tanto

$$\int_{-1}^{1} f(x,y) \cdot \chi_C(x,y)dy = \int_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{1-x^2}}^{1} f(x,y)dy.$$

En general, si $C \subset A \times B$, la mayor dificultad para deducir expresiones para $\int_C f$ será determinar $C \cap (\{x\} \times B)$ para $x \in A$. Si es más fácil determinar $C \cap (A \times \{y\})$ para $y \in B$ se puede utilizar la integral iterada.

$$\int_C f = \int_B \left(\int_A f(x,y) \cdot \chi_C(x,y)dx \right) dy.$$

Problemas. **3 - 23.** Sea $C \subset A \times B$ un conjunto de contenido 0. Sea $A' \subset A$ el conjunto de todas las $x \in A$ tales que $\{y \in B: (x,y) \in C\}$ *no* tiene contenido 0. Probar que A' es un conjunto de medida 0. *Indicación:* χ_C es integrable y $\int_{A\times B} \chi_C = \int_A \mathfrak{U} = \int_A \mathfrak{L}$, de manera que $\int_A \mathfrak{U} - \mathfrak{L} = 0$.

3 - 24. Sea $C \subset [0,1] \times [0,1]$ la unión de todos los $\{p/q\} \times [0,1/q]$, donde p/q es un número racional en $[0,1]$ designado por su representante irreducible. Utilícese C para probar que la palabra «medida» en el problema 3-23 no puede ser sustituida por «contenido».

3 - 25. Aplíquese la inducción respecto de n para probar que $[a_1,b_1] \times \ldots [a_n,b_n]$ no es un conjunto de medida 0 (o contenido 0), si $a_i < b_i$ para cada i.

3 - 26. Sea f: $[a,b] \to \mathbf{R}$ integrable y no negativa y sea $A_f = \{(x,y)$: $a \leq x \leq b$ y $0 \leq y \leq f(x)\}$. Probar que A_f es medible Jordan y tiene área $\int_a^b f$.

3 - 27. Si f: $[a,b] \times [a,b] \to \mathbf{R}$ es integrable, probar que

$$\int_a^b \int_a^y f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \int_x^b f(x,y)dy\,dx.$$

Indicación: Calcular $\int_C f$ de dos maneras distintas para un conjunto conveniente $C \subset [a,b] \times [a,b]$.

3 - 28.* Utilizar el teorema de Fubini para dar una demostración sencilla de que $D_{1,2}f = D_{2,1}f$ si éstas son continuas. *Indicación:* Si $D_{1,2}f(a) - D_{2,1}f(a) > 0$, existe un rectángulo A que contiene a tal que $D_{1,2}f - D_{2,1}f > 0$ en A.

3 - 29. Utilizar el teorema de Fubini para deducir una expresión para el volumen de un conjunto en $\mathbf{R}^3$ haciendo girar un conjunto en el plano yz alrededor del eje de las x.

3 - 30. Sea C el conjunto del problema 1-17. Probar que

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_C(x,y)dx \right) dy = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_C(y,x)dy \right) dx = 0$$

pero que $\int_{[0,1]\times[0,1]} \chi_C$ no existe.

3 - 31. Si $A = [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n]$ y f: $A \to \mathbf{R}$ es continua, se define F: $A \to \mathbf{R}$ por

$$F(x) = \int_{[a_1,x^1]\times \cdots \times [a_n,x^n]} f.$$

¿Cuál es $D_iF(x)$, para x en el interior de A?

3 - 32.* Sea f: $[a,b] \times [c,d] \to \mathbf{R}$ y supóngase que D_2f es continua. Se define $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$. Probar la *regla de Leibnitz:* $F'(y) = \int_a^b D_2f(x,y)dx$. *Indicación:* $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b (\int_c^y D_2f(x,y)dy + f(x,c)dx$. (La demostración mostrará que la continuidad de D_2f puede ser sustituida por hipótesis considerablemente más débiles.)

3 - 33. Si f: $[a,b] \times [c,d] \to \mathbf{R}$ y D_2f es continua, se define $F(x,y) = \int_a^x f(t,y)dt$.

(a) Encontrar D_1F y D_2F.

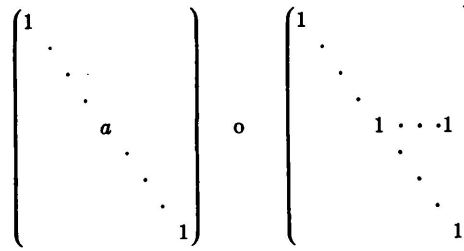
(b) Si $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t,x)dt$, hallar $G'(x)$.

3 - 34.* Sean g_1,g_2: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ diferenciables con continuidad y se supone $D_1g_2 = D_2g_1$. Como en el problema 2-21, sea

$$f(x,y) = \int_0^x g_1(t,0)dt + \int_0^y g_2(x,t)dt.$$

Probar que $D_1f(x,y) = g_1(x,y)$.

3 - 35.* (a) Sea g: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ una aplicación lineal con matriz



(La segunda de las matrices contiene exactamente un 1 fuera de la diagonal.) Si U es un rectángulo, probar que el volumen de $g(U)$ es $|\det g| \cdot v(U)$.

(b) Probar que $|\det g| \cdot v(U)$ es el volumen de $g(U)$ para cada transformación lineal g: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. *Indicación:* Si $\det g \neq 0$, entonces g es la composición de aplicaciones lineales del tipo considerado en (a).

3 - 36. (Principio de Cavalieri). Sean A y B subconjuntos de $\mathbf{R}^3$ medibles Jordan. Sea $A_c = \{(x,y) : (x,y,c) \in A\}$ y se define B_c análogamente. Supóngase que cada A_c y B_c son medibles Jordan y tienen la misma área. Probar que A y B tienen el mismo volumen.

PARTICIONES DE LA UNIDAD

En esta sección se introduce un instrumento de extrema importancia en la teoría de la integración.

3 - 11. Teorema. *Sea $A \subset \mathbf{R}^n$ y sea $\mathcal{O}$ un recubrimiento abierto de A. Entonces existe una colección Φ funciones φ de la clase C^∞ definidas en un conjunto abierto que contiene A, con las siguientes propiedades:*

(1) *Para cada $x \in A$ se tiene $0 \leq \varphi(x) \leq 1$.*
(2) *Para cada $x \in A$ existe un conjunto abierto V que contiene x tal que todas, excepto un número finito de las $\varphi \in \Phi$, son 0 en V.*
(3) *Para cada $x \in A$ se tiene $\Sigma_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1$* (en virtud de (2) para cada x esta suma es finita en un conjunto abierto que contiene x).
(4) *Para cada $\varphi \in \Phi$ existe un conjunto abierto U en $\mathcal{O}$ tal que $\varphi = 0$ al exterior de un conjunto cerrado contenido en U.*

(Una colección Φ que satisfaga las condiciones (1) a (3) se denomina **partición de la unidad** para A con funciones C^∞. Si Φ satisface también (4), se dice que es **subordinada** al recubrimiento $\mathcal{O}$. En este capítulo sólo se utilizará la continuidad de las funciones φ.)

Demostración. *Caso 1. A es compacto.*

Entonces un número finito $U_1, \ldots, U_n$ de conjuntos abiertos de $\mathcal{O}$ recubren A. Evidentemente será suficiente construir una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Se buscarán primero conjuntos compactos $D_i \subset U_i$ cuyos interiores recubran A. Los conjuntos D_i se construyen inductivamente como sigue. Supóngase que $D_1, \ldots, D_k$ se han elegido de manera que {interior D_1, $\ldots$, interior D_k, $U_{k+1}, \ldots, U_n$} recubran A. Sea

$$C_{k+1} = A - (\text{int } D_1 \cup \cdots \cup \text{int } D_k \cup U_{k+2} \cup \cdots \cup U_n).$$

Entonces $C_{k+1} \subset U_{k+1}$ es compacto. Por tanto (problema 1-22) se puede encontrar un conjunto compacto D_{k+1} tal que

$$C_{k+1} \subset \text{interior } D_{k+1} \quad \text{y} \quad D_{k+1} \subset U_{k+1}.$$

Construidos los conjuntos $D_1, \ldots, D_n$, sea ψ_i una función C^∞ no negativa que sea positiva en D_i y 0 en el exterior de un conjunto cerrado contenido en U_i (problema 2-26). Puesto que $\{D_1, \ldots, D_n\}$ recubre A, se tiene $\psi_1(x) + \ldots + \psi_n(x) > 0$ para todo x en un conjunto abierto U que contiene A. En U se puede definir

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\psi_1(x) + \cdots + \psi_n(x)}.$$

Si $f : U \longrightarrow [0,1]$ es una función C^∞ que es 1 en A y 0 en el exterior de un conjunto cerrado contenido en U, entonces $\Phi = \{f \cdot \varphi_1, \ldots, f \cdot \varphi_n\}$ es la partición de la unidad deseada.

Caso 2. $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$, *donde cada* A_i *es compacto y* $A_i \subset$ *interior* A_{i+1}.

Para cada i se designa por $\mathcal{O}_i$ el conjunto de todos los $U \cap (\text{interior } A_{i+1} - A_{i-2})$ donde U es de $\mathcal{O}$. Entonces $\mathcal{O}_i$ es un recubrimiento del conjunto compacto $B_i = A_i - \text{interior } A_{i-1}$. En virtud del caso 1 existe una partición de la unidad Φ_i para B_i, subordinada a $\mathcal{O}_i$. Para cada $x \in A$ la suma

$$\sigma(x) = \sum_{\varphi \in \Phi_i, \text{ todo } i} \varphi(x)$$

es una suma finita en un cierto conjunto abierto que contiene a x, como $x \in A_i$ se tiene $\varphi(x) = 0$ para $\varphi \in \Phi_j$ con $j \geq i + 2$. Para cada φ en cada Φ_i se define $\varphi'(x) = \varphi(x)/\sigma(x)$. La colección de todas las φ' es la partición de la unidad deseada.

Caso 3. A es abierto.

Sea $A_i = \{x \in A : |x| \leq i$ y distancia de x a la frontera de $A \geq 1/i\}$, y se aplica el caso 2.

Caso 4. A es arbitrario.

Sea B la unión de todas las U en $\mathcal{O}$. En virtud del caso 3 existe una partición de la unidad para B; ésta es también una partición de la unidad para A.∎

Interesa destacar una consecuencia importante de la condición (2) del teorema. Sea $C \subset A$ compacto. Para cada $x \in C$ existe un conjunto abierto V_x que contiene x tal que sólo un número finito de $\varphi \in \Phi$ no son 0 en V_x. Puesto que C es compacto, un número finito de tales V_x recubren C. Así sólo un número finito de $\varphi \in \Phi$ no son 0 en C.

Una aplicación importante de las particiones de la unidad pondrá de manifiesto cuál es su papel principal: componer resultados locales para obtener resultados globales. Se ha visto que $\int_A f$ puede no existir a pesar de ser A un conjunto abierto acotado y $\{x: f$ es discontinua en $x\}$ tener medida 0. Ahora bien, si A es un conjunto abierto cualquiera, existe ciertamente un recubrimiento abierto $\mathcal{O}$ de A tal que cada $U \in \mathcal{O}$ está contenido en A y cada $U \in \mathcal{O}$ es medible Jordan (por ejemplo, A es la unión de rectángulos abiertos). Si $\mathcal{O}$ es uno de estos recubrimientos y Φ es una partición de la unidad para A subordinada a $\mathcal{O}$, entonces $\varphi \cdot f$ será integrable para cada $\varphi \in \Phi$. Se define entonces $\int_A f$ como $\Sigma_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot f$, supuesto que esta suma converge (esta suma puede converger aún siendo A y f no acotados). Esta suma es equivalente a la suma ordinaria de las series infinitas. Ya se ha observado (en la demostración del caso 3 del teorema 3-11) que el conjunto abierto A es la unión de una sucesión de conjuntos compactos. Como sólo un número finito de $\varphi \in \Phi$ no son cero en cada uno de estos conjuntos compactos, con las integrales no nulas $\int_A \varphi \cdot f$ se puede formar una sucesión. Como, por otra parte, no se ha elegido una ordenación particular en estas sucesiones, se entiende que se ha de emplear la convergencia cualquiera que sea el orden, y por lo tanto, ha de ser convergencia absoluta.

3 - 12. Teorema.

(1) *Si A es acotado, f: $A \to \mathbf{R}$ es una función acotada, y $\{x$: f es discontinua en $x\}$ tiene medida* 0, *entonces la suma*

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot f$$

converge.

(2) *Si $\mathcal{O}'$ es otro de estos recubrimientos y Ψ es una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{O}'$, entonces*

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot f = \sum_{\psi \in \Psi} \int_A \psi \cdot f.$$

(3) *Si A es medible Jordan y f: $A \to \mathbf{R}$ es integrable, entonces esta definición de $\int_A f$ coincide con la antigua.*

Demostración.

(1) Se supone que A está contenido en el rectángulo cerrado B, y $|f(x)| \leq M$ para $x \in A$. Entonces $\int_A |\varphi \cdot f| \leq M \int^A \varphi$. Por tanto, si $F \subset \Phi$ es cualquier subconjunto finito de Φ, se tiene

$$\sum_{\varphi \in F} \left| \int_A \varphi \cdot f \right| \leq \sum_{\varphi \in F} M \int_A \varphi = M \int_A \sum_{\varphi \in F} \varphi.$$

Obsérvese que el segundo miembro tiene sentido puesto que F es finito. Ahora bien, en B se tiene $\Sigma_{\varphi \in F} \varphi \leq \Sigma_{\varphi \in \Phi} \varphi \leq 1$. Por tanto $\Sigma_{\varphi \in F} \left| \int_A \varphi \cdot f \right| \leq M \cdot v(B)$. Así $\Sigma_{\varphi \in \Phi} \left| \int_A \varphi \cdot f \right|$, y por consiguiente $\Sigma_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot f$, converge.

(2) Si Ψ es otra partición de la unidad, la colección de todos los $\varphi \cdot \psi$ para $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in \Psi$ es una partición de la unidad. Pero $\varphi \cdot f = 0$ excepto en un cierto conjunto compacto C, y hay sólo un número finito de ψ que no son cero en C. Esto justifica escribir

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \sum_{\psi \in \Psi} \psi \cdot \varphi \cdot f = \sum_{\varphi \in \Phi, \psi \in \Psi} \int_A \psi \cdot \varphi \cdot f,$$

y la última expresión igual a $\Sigma_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot f$, en virtud del mismo razonamiento.

(3) Si $\varepsilon > 0$ existe (problema 3-22) un conjunto compacto medible Jordan $C \subset A$ tal que $\int_{A-C} 1 < \varepsilon$. Además sólo un número finito de $\varphi \in \Phi$ que son distintas de cero en C. Si $F \subset \Phi$ es cualquier colección finita que contenga éstas, entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_A f - \sum_{\varphi \in F} \int_A \varphi \cdot f \right| & \\ &\leq \int_A \left| f - \sum_{\varphi \in F} \varphi \cdot f \right| \leq M \int_A \left(1 - \sum_{\varphi \in F} \varphi \right) \\ &= M \int_A \sum_{\varphi \in \Phi - F} \varphi \leq M \int_{A-C} 1 \leq M\varepsilon. \end{aligned}$$

Así $\Sigma_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot f = \int_A f$. ∎

Problemas. **3 - 37.** Se supone que f: $(0,1) \to \mathbf{R}$ es una función continua no negativa. Probar que $\int_{(0,1)} f$ existe si y sólo si $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f$ existe.

3 - 38. Sea $A_n = [1 - 1/2^n,\ 1 - 1/2^{n+1}]$. Se supone que f: $(0,1) \to \mathbf{R}$ satisface $\int_{A_n} f = (-1)^n(1/n)$. Probar que $\int_{(0,1)} f$ no existe pero $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{(\varepsilon, 1-\varepsilon)} f = \log 2$.

CAMBIO DE VARIABLES

Si g: $[a,b] \to \mathbf{R}$ es diferenciable con continuidad y f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es continua, entonces, como ya es sabido,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) \cdot g'.$$

La demostración es muy simple: si $F' = f$, entonces $(F \circ g)' = (f \circ g) \cdot g'$; así el primer miembro es $F(g(b)) - F(g(a))$, mientras que el segundo miembro es $F \circ g(b) - F \circ g(a) = F(g(b) - F(g(a))$.

Se deja para el lector el probar que si g es 1-1, entonces la fórmula anterior se puede escribir

$$\int_{g((a,b))} f = \int_{(a,b)} f \circ g \cdot |g'|.$$

(Considérense por separado los casos en que g es creciente y g es decreciente.) La generalización de esta fórmula a dimensiones superiores no es de ninguna manera tan sencilla.

3 - 13. Teorema. *Sea $A \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto y g: $A \to \mathbf{R}^n$ una función 1-1, diferenciable con continuidad, tal que $\det g'(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Si f: $g(A) \to \mathbf{R}$ es una función integrable, entonces*

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g)|\det g'|.$$

Demostración. Se empieza por algunas reducciones importantes.

1. Supóngase que existe un recubrimiento abierto $\mathcal{O}$ de A tal que para $U \in \mathcal{O}$ y cada f integrable se tiene

$$\int_{g(U)} f = \int_U (f \circ g)|\det g'|.$$

Entonces el teorema es cierto para todo el A. (Como g es 1-1 en un conjunto

abierto alrededor de cada punto, no es sorprendente que esta sea la única parte de la demostración en la que se utilice el hecho de ser g,1-1 en todo el A.)

Demostración de (1). La colección de todos los $g(U)$ es un recubrimiento abierto de $g(A)$. Sea Φ una partición de la unidad subordinada a este recubrimiento. Si es $\varphi = 0$ fuera de $g(U)$, entonces, puesto que g es 1-1, se tiene $(\varphi \cdot f) \circ g = 0$ en el exterior de U. Por tanto la

$$\int_{g(U)} \varphi \cdot f = \int_U [(\varphi \cdot f) \circ g] |\det g'|$$

se puede escribir

$$\int_{g(A)} \varphi \cdot f = \int_A [(\varphi \cdot f) \circ g] |\det g'|.$$

De donde

$$\begin{aligned} \int_{g(A)} f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_{g(A)} \varphi \cdot f &= \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A [(\varphi \cdot f) \circ g] |\det g'| \\ &= \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A (\varphi \circ g)(f \circ g) |\det g'| \\ &= \int_A (f \circ g) |\det g'|. \end{aligned}$$

Observación. El teorema se deduce también de la suposición de que se verifique

$$\int_V f = \int_{g^{-1}(V)} (f \circ g) |\det g'|$$

para V perteneciente a un recubrimiento de $g(A)$. Esta igualdad se deduce de la (1) aplicada a g^{-1}.

2. Basta probar el teorema para la función $f = 1$.

Demostración de (2). Si el teorema es cierto para $f = 1$, es cierto para las funciones constantes. Sea V un rectángulo en $g(A)$ y P una partición de V. Para cada subrectángulo S de P sea f_S la función constante $m_S(f)$. Entonces

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_S m_S(f) \cdot v(S) = \sum_S \int_{\text{int } S} f_S \\ &= \sum_S \int_{g^{-1}(\text{int } S)} (f_S \circ g) |\det g'| \leq \sum_S \int_{g^{-1}(\text{int } S)} (f \circ g) |\det g'| \\ &\leq \int_{g^{-1}(V)} (f \circ g) |\det g'|. \end{aligned}$$

Puesto que $\int_V f$ es el extremo superior de todas las $L(f,P)$, esto demuestra que $\int_V f \leq \int_{g^{-1}(V)} (f \circ g)|\det g'|$. Un razonamiento análogo poniendo $f_S = M_S f$, demuestra que $\int_V f \geq \int_{g^{-1}(V)} (f \circ g)|\det g'|$. El resultado se deduce ahora de la observación anterior.

3. Si el teorema es cierto para g: $A \to \mathbf{R}^n$ y para h: $B \to \mathbf{R}^n$, donde $g(A) \subset B$, entonces es cierto para $h \circ g$: $A \to \mathbf{R}^n$.

Demostración de (3).

$$\begin{aligned}\int_{h \circ g(A)} f = \int_{h(g(A))} f &= \int_{g(A)} (f \circ h)|\det h'| \\ &= \int_A [(f \circ h) \circ g] \cdot [|\det h'| \circ g] \cdot |\det g'| \\ &= \int_A f \circ (h \circ g)|\det (h \circ g)'|.\end{aligned}$$

4. El teorema es cierto si g es una aplicación lineal.

Demostración de (4). En virtud de (1) y (2) basta probar para cada rectángulo abierto que

$$\int_{g(U)} 1 = \int_U |\det g'|.$$

Este resultado se ha considerado en el problema 3-35.

Las observaciones (3) y (4) conjuntamente prueban que se puede suponer que para cada particular $a \in A$ es $g'(a)$ la matriz idéntica: en efecto, si T es la aplicación lineal $Dg(a)$, entonces $(T^{-1} \circ g)'(a) = I$; puesto que el teorema es cierto para T, si es cierto para $T^{-1} \circ g$ será cierto para g.

Estamos ahora en condiciones de dar la demostración, que se hace por inducción respecto a n. Las observaciones anteriores al enunciado del teorema, junto con (1) y (2), demuestran el caso $n = 1$. Supuesto cierto el teorema en dimensión n-1, se demostrará para la dimensión n. Para cada $a \in A$ basta con encontrar un conjunto abierto U con $a \in U \subset A$ para el que sea cierto el teorema. Además se puede suponer que $g'(a) = I$.

Se define h: $A \to \mathbf{R}^n$ por $h(x) = (g^1(x), \ldots, g^{n-1}(x), x^n)$. Entonces $h'(a) = I$. Por tanto, en un cierto abierto U' con $a \in U' \subset A$, la función h es 1-1 y $\det h'(x) \neq 0$. Se puede así definir k: $h(U') \to \mathbf{R}^n$ por $k(x) = (x^1, \ldots, x^{n-1}, g^n(h^{-1}(x)))$ y $g = k \circ h$. Se ha expresado así g como la composición de dos aplicaciones, cada una de las cuales cambia menos de n coordenadas (fig. 3-3).

Hay que atender a unos pocos detalles para asegurarse que k es una función de forma adecuada. Puesto que

$$(g^n \circ h^{-1})'(h(a)) = (g^n)'(a) \cdot [h'(a)]^{-1} = (g^n)'(a),$$

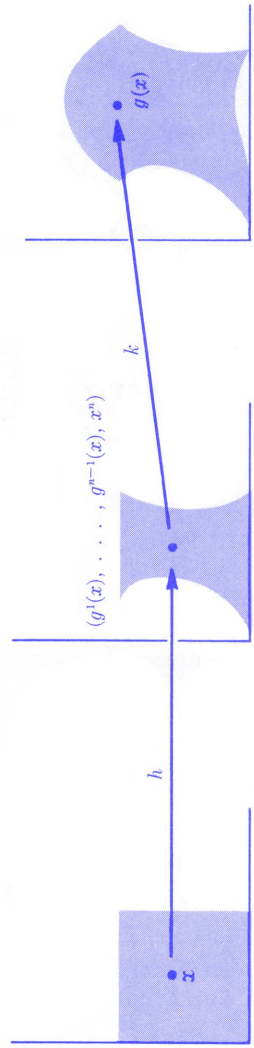


FIGURA 3-3

se tiene $D_n(g^n \circ h^{-1})(h(a)) = D_n g^n(a) = 1$, de manera que $k'(h(a)) = I$. Así en un conjunto abierto V con $h(a) \in V \subset h(U')$, la función k es 1-1 y $\det k'(x) \neq 0$. Poniendo $U = k^{-1}(V)$ se tiene ahora $g = k \circ h$, donde $h\colon U \to \mathbf{R}^n$ y $k\colon V \to \mathbf{R}^n$ y $h(U) \subset V$. En virtud de (3) basta probar el teorema para h y k. Se da la demostración para h; la demostración para k es análoga y más sencilla.

Sea $W \subset U$ un rectángulo de la forma $D \times [a_n, b_n]$, donde D es un rectángulo en $\mathbf{R}^{n-1}$. En virtud del teorema de Fubini.

$$\int_{h(W)} 1 = \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_{h(D \times \{x^n\})} 1 \, dx^1 \cdots dx^{n-1} \right) dx^n.$$

Sea $h_{x^n}\colon D \to \mathbf{R}^{n-1}$ definida por $h_{x^n}(x^1, \ldots, x^{n-1}) =$

$$(g^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, g^{n-1}(x^1, \ldots, x^n)).$$

Entonces cada h_{x^n} es evidentemente 1-1 y

$$\det (h_{x^n})'(x^1, \ldots, x^{n-1}) = \det h'(x^1, \ldots, x^n) \neq 0.$$

Además

$$\int_{h(D \times \{x^n\})} 1 \, dx^1 \cdots dx^{n-1} = \int_{h_{x^n}(D)} 1 \, dx^1 \cdots dx^{n-1}.$$

Aplicando el teorema en el caso $n - 1$ da, por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{h(W)} 1 &= \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_{h_{x^n}(D)} 1 \, dx^1 \cdots dx^{n-1} \right) dx^n \\
&= \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_D |\det (h_{x^n})'(x^1, \ldots, x^{n-1})| dx^1 \cdots dx^{n-1} \right) dx^n \\
&= \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_D |\det h'(x^1, \ldots, x^n)| dx^1 \cdots dx^{n-1} \right) dx^n \\
&= \int_W |\det h'|. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

La condición $\det g'(x) \neq 0$ puede ser eliminada de las hipótesis del teorema 3-13 utilizando el siguiente teorema, que a menudo juega un papel inesperado.

3-14. Teorema (Teorema de Sard). *Sea $g\colon A \to \mathbf{R}^n$ diferenciable con continuidad, donde $A \subset \mathbf{R}^n$ es abierto, y sea $B = \{x \in A\colon \det g'(x) = 0\}$. Entonces $g(B)$ tiene medida 0.*

Demostración. Sea $U \subset A$ un rectángulo cerrado tal que todos los lados de U

tengan longitud l. Sea $\varepsilon > 0$. Si N es suficientemente grande y U se divide en N^n rectángulos, con lados de longitud l/N, entonces para cada uno de estos rectángulos S, si $x \in S$ se tiene

$$|Dg(x)(y - x) - g(y) + g(x)| < \varepsilon|x - y| \leq \varepsilon\sqrt{n}\ (l/N)$$

para todo $y \in S$. Si S corta a B se puede elegir $x \in S \cap B$; puesto que $\det g'(x) = 0$, el conjunto $\{Dg(x)(y - x)\colon y \in S\}$ está contenido en un subespacio $(n-1)$-dimensional V de $\mathbf{R}^n$. Por tanto, el conjunto $\{g(y) - g(x)\colon y \in S\}$ está situado a una distancia menor que $\varepsilon\sqrt{n}\,(l/N)$ de V, de manera que $\{g(y)\colon y \in S\}$ estará situado a una distancia menor que $\varepsilon\sqrt{n}\,(l/N)$ del hiperplano $(n-1)$ dimensional $V + g(x)$. Por otra parte, en virtud del lema 2-10 existe un número M tal que

$$|g(x) - g(y)| < M|x - y| \leq M\sqrt{n}\ (l/N).$$

Así, si S corta a B, el conjunto $\{g(y)\colon y \in S\}$ está contenido en un cilindro cuya altura es $< 2\varepsilon\sqrt{n}\,(l/N)$ y cuya base es una esfera $(n-1)$-dimensional de radio $< M\sqrt{n}\,(l/N)$. Este cilindro tiene volumen $< C(l/N)^n\varepsilon$ donde C es una constante. Hay a lo sumo N^n de tales rectángulos S, de manera que $g(U \cap B)$ está contenido en un conjunto de volumen $< C(l/N)^n \cdot \varepsilon \cdot N^n = Cl^n \cdot \varepsilon$. Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $g(U \cap B)$ tiene medida 0. Puesto que (problema 3-13) se puede recubrir todo el conjunto A con una sucesión de tales rectángulos U, el resultado deseado es consecuencia del teorema 3-4. ∎

El teorema 3-13 es efectivamente la parte más sencilla del teorema de Sard. El enunciado y demostración del resultado completo se encuentra en [17], página 47.

Problemas. **3 - 39.** Utilícese el teorema 3-14 para demostrar el teorema 3-13 sin la hipótesis $\det g'(x) \neq 0$.

3 - 40. Si $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ y $\det g'(x) \neq 0$, probar que en un cierto conjunto abierto que contiene x se puede escribir $g = T \circ g_n \circ \ldots \circ g_1$, donde g_i es de la forma $g_i(x) = (x^1, \ldots, f_i(x), \ldots, x^n)$, y T es una aplicación lineal. Probar que se puede escribir $g = g_n \circ \ldots \circ g_1$ si y sólo si $g'(x)$ es una matriz diagonal.

3 - 41. Se define $f\colon \{r\colon r > 0\} \times (0,2\pi) \to \mathbf{R}^2$ por $f(r,\theta) = (r \cos\theta,\ r \operatorname{sen}\theta)$.

(a) Probar que f es 1-1, calcular $f'(r,\theta)$, y probar que $\det f'(r,\theta) \neq 0$ para todo (r,θ). Probar que $f(\{r\colon r > 0\} \times (0,2\pi))$ es el conjunto A del problema 2-23.

(b) Si $P = f^{-1}$, probar que $P(x,y) = (r(x,y),\theta(x,y))$, donde

$$r(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\ y/x & x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\ y/x & x < 0, \\ \pi/2 & x = 0,\ y > 0, \\ 3\pi/2 & x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Hallar $P'(x,y)$. La función P se denomina **sistema de coordenadas polares** en A.

(c) Sea $C \subset A$ la región entre los círculos de radio r_1 y r_2 y las semirrectas a partir de 0 que forman ángulos θ_1, y θ_2 con el eje de las x. Si h: $A \to \mathbf{R}$ y $h(x,y) = g(r(x,y),\theta(x,y))$, probar que

$$\int_C h = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} rg(r,\theta)d\theta\, dr.$$

Si $B_r = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 \leq r^2\}$, probar que

$$\int_{B_r} h = \int_0^r \int_0^{2\pi} g(r,\theta)d\theta\, dr.$$

(d) Si $C_r = [-r,r] \times [-r,r]$, probar que

$$\int_{B_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \pi(1 - e^{-r^2}/2)$$

y

$$\int_{C_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \left(\int_{-r}^{r} e^{-x^2}\, dx\right)^2.$$

(e) Probar que

$$\lim_{r\to\infty} \int_{B_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \lim_{r\to\infty} \int_{C_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

y concluir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

«Un matemático es aquel para quien *esta igualdad* es tan obvia como para usted que dos y dos son cuatro. Liouville era un matemático.»

—LORD KELVIN

4

Integración en cadenas

PRELIMINARES ALGEBRAICOS

Si V es un espacio vectorial (sobre $\mathbf{R}$), se indicará por V^k el producto de k factores $V \times \ldots \times V$. Una función T: $V^k \to \mathbf{R}$ se denomina **multilineal** si para cada i con $1 \leq i \leq k$ se tiene

$$\begin{aligned} T(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_k) &= T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) \\ &\quad + T(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_k), \\ T(v_1, \ldots, av_i, \ldots, v_k) &= aT(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k). \end{aligned}$$

Una función multilineal T: $V^k \to \mathbf{R}$ se denomina **tensor de orden k** en V (o en forma breve **k-tensor)** y el conjunto de todos los tensores de orden k, que se indica por $\mathfrak{T}^k(V)$, será un espacio vectorial (sobre $\mathbf{R}$) si para $S,T \in \mathfrak{T}^k(V)$ y $a \in \mathbf{R}$ se define

$$\begin{aligned} (S + T)(v_1, \ldots, v_k) &= S(v_1, \ldots, v_k) + T(v_1, \ldots, v_k), \\ (aS)(v_1, \ldots, v_k) &= a \cdot S(v_1, \ldots, v_k). \end{aligned}$$

Hay también una operación que conecta los diversos espacios $\mathfrak{T}^k(V)$. Si $S \in \mathfrak{T}^k(V)$ y $T \in \mathfrak{T}^l(V)$, se define el **producto tensorial** $S \otimes T \in \mathfrak{T}^{k+l}(V)$ por

$$\begin{aligned} S \otimes T(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) \\ = S(v_1, \ldots, v_k) \cdot T(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}). \end{aligned}$$

Obsérvese que el orden de los factores S y T es crucial aquí puesto que $S \otimes T$ y $T \otimes S$ están lejos de ser iguales. Las siguientes propiedades de $\otimes$ se dejan al lector como ejercicios sencillos.

$$\begin{aligned}(S_1 + S_2) \otimes T &= S_1 \otimes T + S_2 \otimes T,\\ S \otimes (T_1 + T_2) &= S \otimes T_1 + S \otimes T_2,\\ (aS) \otimes T &= S \otimes (aT) = a(S \otimes T),\\ (S \otimes T) \otimes U &= S \otimes (T \otimes U).\end{aligned}$$

$(S \otimes T) \otimes U$ y $S \otimes (T \otimes U)$ se acostumbran a designar simplemente por $S \otimes T \otimes U$. Los productos de orden superior $T_1 \otimes \ldots \otimes T_r$ se definen de forma análoga.

El lector habrá ya observado probablemente que $\mathfrak{I}^1(V)$ es precisamente el espacio dual V^*. La operación $\otimes$ permite expresar los otros espacios vectoriales $\mathfrak{I}^k(V)$ por medio de $\mathfrak{I}^1(V)$.

4-1. Teorema. *Sea $v_1, \ldots, v_n$ una base de V, y sea $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ la base dual, $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$. Entonces el conjunto de todos los productos tensoriales de k factores*

$$\varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_k} \qquad 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$$

es una base para $\mathfrak{I}^k(V)$, que además tiene dimensión n^k.

Demostración. Obsérvese que

$$\begin{aligned}\varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_k}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) &\\ = \delta_{i_1,j_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{i_k,j_k} &\\ = \begin{cases} 1 & \text{si } j_1 = i_1, \ldots, j_k = i_k,\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}&\end{aligned}$$

Si $w_1, \ldots, w_k$ son k vectores con $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$ y T está en $\mathfrak{I}^k(V)$, entonces

$$\begin{aligned}T(w_1, \ldots, w_k) &= \sum_{j_1, \ldots, j_k = 1}^{n} a_{1,j_1} \cdot \ldots \cdot a_{k,j_k} T(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})\\ &= \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \cdot \varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_k}(w_1, \ldots, w_k).\end{aligned}$$

Así $$T = \Sigma_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \cdot \varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_k}.$$

Por consiguiente, las $\varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_k}$ generan $\mathfrak{I}^k(V)$.

Supóngase ahora que existan números $a_{i_1},\ldots,_{i_k}$ tales que

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} a_{i_1,\ldots,i_k} \cdot \varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_k} = 0.$$

Aplicando ambos miembros de esta ecuación a $(v_{j_1},\ldots,v_{j_k})$ se obtiene $a_{j_1},\ldots,_{j_k} = 0$. Por tanto las $\varphi_{i_1}\otimes\ldots\otimes\varphi_{i_k}$ son linealmente independientes. ∎

Una construcción importante, que es familiar para el caso de espacios duales, se puede hacer también para tensores. Si $f: V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, se define una aplicación lineal $f^*: \mathfrak{T}^k(W) \longrightarrow \mathfrak{T}^k(V)$ por

$$f^*T(v_1,\ldots,v_k) = T(f(v_1),\ldots,f(v_k))$$

para $T \in \mathfrak{T}^k(W)$ y $v_1,\ldots,v_k \in V$. Es fácil comprobar que $f^*(S\otimes T) = f^*S \otimes f^*T$.

El lector está ya familiarizado con algunos tensores, aparte de los elementos de V^*. El primer ejemplo es el producto interior $\langle,\rangle \in \mathfrak{T}^2(\mathbf{R}^n)$. Sobre la base de que todo concepto matemático bueno merece ser generalizado, se define un **producto interior** en V como un tensor T de segundo orden tal que T es **simétrico**, es decir, $T(v,w) = T(w,v)$ para $v,w \in W$ y tal que T es **definido positivo**, es decir, $T(v,v) > 0$ si $v \neq 0$. Se indicará por $\langle,\rangle$ el **producto interior usual** en $\mathbf{R}^n$. El teorema siguiente muestra que nuestra generalización no es demasiado general.

4-2. Teorema. *Si T es un producto interior en V, existe una base $v_1,\ldots,v_n$ para V tal que $T(v_i,v_j) = \delta_{ij}$. (Una tal base se denomina* **ortonormal** *respecto a T.) En consecuencia existe un isomorfismo $f: \mathbf{R}^n \longrightarrow V$ tal que $T(f(x),f(y)) = \langle x,y\rangle$ para $x,y \in \mathbf{R}^n$. En otras palabras $f^*T = \langle,\rangle$.*

Demostración. Sea $w_1,\ldots,w_n$ una base para V. Se define

$$\begin{aligned}
w_1' &= w_1,\\
w_2' &= w_2 - \frac{T(w_1',w_2)}{T(w_1',w_1')}\cdot w_1',\\
w_3' &= w_3 - \frac{T(w_1',w_3)}{T(w_1',w_1')}\cdot w_1' - \frac{T(w_2',w_3)}{T(w_2',w_2')}\cdot w_2',\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que $T(w_i',w_j') = 0$ si $i \neq j$ y que si $w_i' \neq 0$ es $T(w_i',w_j') > 0$. Se define ahora $v_i = w_i'/\sqrt{T(w_i',w_i')}$. El isomorfismo f queda definido por $f(e_i) = v_i$. ∎

A pesar de su importancia, el producto interior tiene menos interés que el de otra función familiar, presente en las más variadas teorías: el tensor det $\in \mathfrak{T}^n(\mathbf{R}^n)$. Al intentar generalizar esta función, se recuerda que al cambiar dos columnas de una matriz cambia el signo de su determinante. Esto sugiere la siguiente definición. Un tensor de orden k, $\omega \in \mathfrak{T}^k(V)$ se denomina **alternado** si

$$\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$$
$$\text{para todo } v_1, \ldots, v_k \in V.$$

(En esta igualdad se han intercambiado v_i y v_j y las otras v se han dejado fijas.) El conjunto de todos los tensores de orden k alternados, es evidentemente un subespacio $\Lambda^k(V)$ de $\mathfrak{T}^k(V)$. Puesto que para la formación de un determinante se requiere mucho trabajo, no es sorprendente que los tensores de orden k alternados sean difíciles de escribir. Hay, sin embargo, un método uniforme para expresarlos todos. Recuérdese que el signo de una permutación σ, indicado por sgn σ, es $+1$ si σ es par y -1 si σ es impar. Si $T \in \mathfrak{T}^k(V)$, se define Alt(T) por

$$\text{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma \cdot T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}),$$

donde S_k es el conjunto de todas las permutaciones de los números de 1 a k.

4 - 3. Teorema.

(1) *Si* $T \in \mathfrak{T}^k(V)$, *entonces* $Alt(T) \in \Lambda^k(V)$.
(2) *Si* $\omega \in \Lambda^k(V)$, *entonces* $Alt(\omega) = \omega$.
(3) *Si* $T \in \mathfrak{T}^k(V)$, *entonces* $Alt(Alt(T)) = Alt(T)$.

Demostración.

(1) Sea (i,j) la permutación que cambia entre sí i y j y deja todos los otros números fijos. Si $\sigma \in S_k$, sea $\sigma' = \sigma \cdot (i,j)$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\text{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma \cdot T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(j)}, \ldots, v_{\sigma(i)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma \cdot T(v_{\sigma'(1)}, \ldots, v_{\sigma'(i)}, \ldots, v_{\sigma'(j)}, \ldots, v_{\sigma'(k)}) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma' \in S_k} -\text{sgn } \sigma' \cdot T(v_{\sigma'(1)}, \ldots, v_{\sigma'(k)}) \\
&= -\text{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_k).
\end{aligned}$$

(2) Si $\omega \in \Lambda^k(V)$, y $\tau = (i,j)$, entonces $\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega(v_1, \ldots, v_k)$. Puesto que cada σ es un producto de permutaciones de la forma (i,j), esta igualdad se verifica para todo σ. Por tanto

$$\begin{aligned}\operatorname{Alt}(\omega)(v_1, \ldots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega(v_1, \ldots, v_k) \\ &= \omega(v_1, \ldots, v_k).\end{aligned}$$

(3) es consecuencia inmediata de (1) y (2). ∎

Para determinar la dimensión de $\Lambda^k(V)$, se necesitará un teorema análogo al teorema 4-1. Evidentemente, si $\omega \in \Lambda^k(V)$ y $\eta \in \Lambda^l(V)$ entonces $\omega \otimes \eta$ en general no está en $\Lambda^{k+l}(V)$. Se definirá un nuevo producto, el producto **exterior** $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(V)$ por

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!\, l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

(La razón de introducir este coeficiente aparecerá más tarde.) Las siguientes propiedades de $\wedge$ se dejan como ejercicio al lector:

$$\begin{aligned}(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta &= \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta, \\ \omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) &= \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2, \\ a\omega \wedge \eta &= \omega \wedge a\eta = a(\omega \wedge \eta), \\ \omega \wedge \eta &= (-1)^{kl} \eta \wedge \omega, \\ f^*(\omega \wedge \eta) &= f^*(\omega) \wedge f^*(\eta).\end{aligned}$$

La igualdad $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$ es cierta pero requiere más trabajo.

4 - 4. Teorema.

(1) *Si* $S \in \mathfrak{T}^k(V)$ y $T \in \mathfrak{T}^l(V)$ y $Alt(S) = 0$, *entonces*

$$Alt(S \otimes T) = Alt(T \otimes S) = 0.$$

(2) $Alt(Alt(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = Alt(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$
$= Alt(\omega \otimes Alt(\eta \otimes \theta))$.

(3) *Si* $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$, y $\theta \in \Lambda^m(V)$, *entonces*

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(k+l+m)!}{k!\,l!\,m!} Alt(\omega \otimes \eta \otimes \theta).$$

Demostración.

(1)

$$(k+l)Alt(S \otimes T)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \cdot T(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Si $G \subset S_{k+l}$ está formado por todas las σ que dejan $k+1, \ldots, k+l$ fijos, entonces

$$\sum_{\sigma \in G} \operatorname{sgn} \sigma \cdot S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \cdot T(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}) = \Big[\sum_{\sigma' \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma' \cdot S(v_{\sigma'(1)}, \ldots, v_{\sigma'(k)}) \Big] \cdot T(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = 0.$$

Supóngase ahora que $\sigma_0 \notin G$. Sea $G \cdot \sigma_0 = \{\sigma \cdot \sigma_0 : \sigma \in G\}$ y sea

$$v_{\sigma_0(1)}, \ldots, v_{\sigma_0(k+l)} = w_1, \ldots, w_{k+l}.$$

Entonces

$$\sum_{\sigma \in G \cdot \sigma_0} \operatorname{sgn} \sigma \cdot S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \cdot T(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}) = \Big[\operatorname{sgn} \sigma_0 \cdot \sum_{\sigma' \in G} \operatorname{sgn} \sigma' \cdot S(w_{\sigma'(1)}, \ldots, w_{\sigma'(k)}) \Big] \cdot T(w_{k+1}, \ldots, w_{k+l}) = 0.$$

Obsérvese que $G \cap G \cdot \sigma_0 = \varnothing$. En efecto, si $\sigma \in G \cap G \cdot \sigma_0$, entonces $\sigma = \sigma' \cdot \sigma_0$ para algún $\sigma' \in G$ y $\sigma_0 = \sigma \cdot (\sigma')^{-1} \in G$, que es una contradicción. Se puede continuar de esta forma descomponiendo S_{k+l} en subconjuntos disjuntos; la suma extendida a cada subconjunto es 0 de manera que la suma extendida a S_{k+l} es 0. La relación $\operatorname{Alt}(T \otimes S) = 0$ se demuestra análogamente.

(2) Se tiene

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\eta \otimes \theta) - \eta \otimes \theta) = \mathrm{Alt}(\eta \otimes \theta) - \mathrm{Alt}(\eta \otimes \theta) = 0.$$

Por tanto en virtud de (1) se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Alt}(\omega \otimes [\mathrm{Alt}(\eta \otimes \theta) - \eta \otimes \theta]) \\ &= \mathrm{Alt}(\omega \otimes \mathrm{Alt}(\eta \otimes \theta)) - \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta). \end{aligned}$$

La otra igualdad se demuestra de forma análoga.

(3)
$$\begin{aligned} (\omega \wedge \eta) \wedge \theta &= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!\,m!}\,\mathrm{Alt}((\omega \wedge \eta) \otimes \theta) \\ &= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!\,m!}\,\frac{(k+l)!}{k!\,l!}\,\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta). \end{aligned}$$

La otra igualdad se demuestra de forma análoga. ∎

Naturalmente, tanto $\omega \wedge (\eta \wedge \theta)$ como $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta$ se indican simplemente por $\omega \wedge \eta \wedge \theta$, y un producto de orden superior $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r$ se define de forma análoga. Si $v_1, \ldots, v_n$ es una base para V y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es la base dual, una base para $\Lambda^k(V)$ se puede ahora construir fácilmente.

4-5. Teorema. *El conjunto de todos los*

$$\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k} \qquad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$$

es una base para $\Lambda^k(V)$, *que por tanto tiene dimensión*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Demostración. Si $\omega \in \Lambda^k(V) \subset \mathfrak{T}^k(V)$, entonces se puede escribir

$$\omega = \sum_{i_1, \ldots, i_k} a_{i_1, \ldots, i_k} \varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_k}.$$

Así

$$\omega = \mathrm{Alt}(\omega) = \sum_{i_1, \ldots, i_k} a_{i_1, \ldots, i_k} \mathrm{Alt}(\varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_k})$$

Puesto que cada $\mathrm{Alt}(\varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k})$ es el producto de una constante por una de los $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$, estos elementos generan $\Lambda^k(V)$. La independencia lineal se demuestra como en el teorema 4-1 (ver problema 4-1). ∎

Si V tiene dimensión n, se deduce del teorema 4-5 que $\Lambda^n(V)$ tiene dimensión 1. Así todos los tensores de orden n alternados en V son múltiplos de uno no nulo. Puesto que el determinante es un ejemplo de un elemento de $\Lambda^n(\mathbf{R}^n)$, no es sorprendente encontrarlo en el siguiente teorema.

4-6. Teorema. *Sea $v_1, \ldots, v_n$ una base para V, y sea $\omega \in \Lambda^n(V)$. Si $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$ son n vectores en V, entonces*

$$\omega(w_1, \ldots, w_n) = \det(a_{ij}) \cdot \omega(v_1, \ldots, v_n).$$

Demostración. Se define $\eta \in \Lambda^n(\mathbf{R}^n)$ por

$$\eta((a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{n1}, \ldots, a_{nn})) = \omega(\Sigma a_{1j} v_j, \ldots, \Sigma a_{nj} v_n).$$

Evidentemente $\eta \in \Lambda^n(\mathbf{R}^n)$ de manera que $\eta = \lambda \cdot \det$ para algún $\lambda \in \mathbf{R}$ y $\lambda = \eta(e_1, \ldots, e_n) = \omega(v_1, \ldots, v_n)$. ∎

El teorema 4-6 muestra que un $\omega \in \Lambda^n(V)$ no nulo separa al conjunto de las bases de V en dos grupos disjuntos, aquellas con $\omega(v_1, \ldots, v_n) > 0$ y aquellas para las cuales $\omega(v_1, \ldots, v_n) < 0$; si $v_1, \ldots, v_n$ y $w_1, \ldots, w_n$ son dos bases y $A = (a_{ij})$ está definido por $w_i = \Sigma a_{ij} v_j$, entonces $v_1, \ldots, v_n$ y $w_1, \ldots, w_n$ están en el mismo grupo si y sólo si $\det A > 0$. Este criterio es independiente de ω y puede utilizarse siempre para dividir las bases de V en dos grupos disjuntos. Cada uno de estos dos grupos es una **orientación** de V. La orientación a la que pertenece una base $v_1, \ldots, v_n$ se indica por $[v_1, \ldots, v_n]$ y la otra orientación se indica por $-[v_1, \ldots, v_n]$. En $\mathbf{R}^n$ se define la **orientación usual** por $[e_1, \ldots, e_n]$.

El hecho que $\dim \Lambda^n(\mathbf{R}^n) = 1$ probablemente no resulta nuevo, puesto que det se define frecuentemente como el único elemento $\omega \in \Lambda^n(\mathbf{R}^n)$ tal que $\omega(e_1, \ldots, e_n) = 1$. Para un espacio vectorial general V no existe otro criterio de esta clase para distinguir un particular $\omega \in \Lambda^n(V)$. Supóngase, sin embargo, que se ha dado un producto interior T para V. Si $v_1, \ldots, v_n$ y $w_1, \ldots, w_n$ son dos bases que son ortonormales con respecto a T, y la matriz $A = (a_{ij})$ está definida por $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$, entonces

$$\delta_{ij} = T(w_i, w_j) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ij} a_{jl} T(v_k, v_l) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}.$$

En otras palabras, si A^T designa la matriz transpuesta de la matriz A, entonces

se tiene $A \cdot A^T = I$, de manera que $\det A = \pm 1$. Se sigue del teorema 4-6 que si $\omega \in \Lambda^n(V)$ satisface $\omega(v_1, \ldots, v_n) = \pm 1$, entonces $\omega(w_1, \ldots, w_n) = \pm 1$. Si se ha dado una orientación μ para V, se deduce que existe una única $\omega \in \Lambda^n(V)$ tal que $\omega(v_1, \ldots, v_n) = 1$ siempre que $v_1, \ldots, v_n$ sea una base ortonormal tal que $[v_1, \ldots, v_n] = \mu$. Esta única ω se denomina **elemento de volumen** de V, determinado por el producto interior T y la orientación μ. Obsérvese que det es el elemento de volumen de $\mathbf{R}^n$ determinado por el producto interior usual y la orientación usual, y que $|\det(v_1, \ldots, v_n)|$ es el volumen del paralelepípedo engendrado por los segmentos de recta que van del origen a cada uno de los $v_1, \ldots, v_n$.

Se concluye esta sección con una construcción que se restringirá a $\mathbf{R}^n$. Si $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbf{R}^n$ y φ está definida por

$$\varphi(w) = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n-1} \\ w \end{pmatrix},$$

entonces $\varphi \in \Lambda^1(\mathbf{R}^n)$; por tanto existe una única $z \in \mathbf{R}^n$ tal que

$$\langle w, z \rangle = \varphi(w) = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n-1} \\ w \end{pmatrix}.$$

Este z se designa por $v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$ y se denomina el **producto vectorial** de $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Las siguientes propiedades se deducen inmediatamente de la definición:

$$\begin{aligned} v_{\sigma(1)} \times \cdots \times v_{\sigma(n-1)} &= \operatorname{sgn} \sigma \cdot v_{\sigma(1)} \times \cdots \times v_{\sigma(n-1)}, \\ v_1 \times \cdots \times a v_i \times \cdots \times v_{n-1} &= a \cdot (v_1 \times \cdots \times v_{n-1}), \\ v_1 \times \cdots \times (v_i + v_i') \times \cdots \times v_{n-1} & \\ = v_1 \times \cdots \times v_i \times \cdots \times v_{n-1} & \\ + v_1 \times \cdots \times v_i' \times \cdots \times v_{n-1}. & \end{aligned}$$

No es corriente en Matemáticas tener un «producto» que dependa de más de dos factores. En el caso de dos vectores $v, w \in \mathbf{R}^3$ se obtiene un producto con un aspecto más convencional $v \times w \in \mathbf{R}^3$. Por esta razón se dice muchas veces que el producto vectorial sólo se puede definir en $\mathbf{R}^3$.

Problemas. **4 - 1.*** Sea $e_1, \ldots, e_n$ la base usual de $\mathbf{R}^n$ y sea $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ la base dual.

(a) Probar que $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = 1$. ¿Qué sería el segundo miembro si el factor $(k + l)!/k!l!$ no apareciera en la definición de $\wedge$?

(b) Probar que $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}(v_1, \ldots, v_k)$ es el determinante del menor $k \times k$ de $\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_k \end{pmatrix}$, obtenido seleccionando las columnas $i_1, \ldots, i_k$.

4 - 2. Si $f\colon V \to V$ es una aplicación lineal y $\dim V = n$, entonces $f^*\colon \Lambda^n(V) \to \Lambda^n(V)$ ha de consistir en la multiplicación por una constante c. Probar que $c = \det f$.

4 - 3. Si $\omega \in \Lambda^n(V)$ es el elemento de volumen determinado por T y μ, y $w_1, \ldots, w_n \in V$, probar que

$$|\omega(w_1, \ldots, w_n)| = \sqrt{\det (g_{ij})},$$

donde $g_{ij} = T(w_i, w_j)$. *Indicación:* Si $v_1, \ldots, v_n$ es una base ortonormal y $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$, probar que $g_{ij} = \sum_{h=1}^n a_{ih} a_{kj}$.

4 - 4. Si ω es un elemento de volumen V determinado por T y μ, y $f\colon \mathbf{R}^n \to V$ es un isomorfismo tal que $f^*T = \langle , \rangle$ y tal que $[f(e_1), \ldots, f(e_n)] = \mu$, probar que $f^*\omega = \det$.

4 - 5. Si $c\colon [0,1] \to (\mathbf{R}^n)^n$ es continua y cada $(c^1(t), \ldots, c^n(t))$ es una base para $\mathbf{R}^n$, probar que $[c^1(0), \ldots, c^n(0)] = [c^1(1), \ldots, c^n(1)]$. *Indicación:* Considérese $\det \circ c$.

4 - 6. (a) Si $v \in \mathbf{R}^2$, qué es $v \times ?$

(b) Si $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbf{R}^n$ son linealmente independientes, probar que $[v_1, \ldots, v_{n-1}, v_1 \times \ldots \times v_{n-1}]$ es la orientación usual de $\mathbf{R}^n$.

4 - 7. Probar que cada $\omega \in \Lambda^n(V)$ no nulo es el elemento de volumen determinado por algún producto interior T y orientación μ para V.

4 - 8. Si $\omega \in \Lambda^n(V)$ es un elemento de volumen, definir el «producto vectorial» $v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$ por medio de ω.

4 - 9.* Deducir las siguientes propiedades del producto vectorial en $\mathbf{R}^3$:

(a) $e_1 \times e_1 = 0 \quad e_2 \times e_1 = -e_3 \quad e_3 \times e_1 = e_2$
$e_1 \times e_2 = e_3 \quad e_2 \times e_2 = 0 \quad e_3 \times e_2 = -e_1$
$e_1 \times e_3 = -e_2 \quad e_2 \times e_3 = e_1 \quad e_3 \times e_3 = 0.$

(b) $v \times w = (v^2w^3 - w^3v^2)e_1 + (v^3w^1 - v^1w^3)e_2 + (v^1w^2 - v^2w^1)e_3.$

(c) $|v \times w| = |v| \cdot |w| \operatorname{sen} \theta$, donde $\theta = \angle(v,w)$.
$\langle v \times w, v \rangle = \langle v \times w, w \rangle = 0.$

(d) $\langle v, w \times z \rangle = \langle w, v \times z \rangle = \langle z, v \times w \rangle$
$v \times (w \times z) = \langle v,z \rangle w - \langle v,w \rangle z$
$(v \times w) \times z = \langle v,z \rangle w - \langle w,z \rangle v.$

(e) $|v \times w| = \sqrt{\langle v,v \rangle \cdot \langle w,w \rangle - \langle v,w \rangle^2}.$

4 - 10. Si $w_1, \ldots, w_{n-1} \in \mathbf{R}^n$, probar que

$$|w_1 \times \cdots \times w_{n-1}| = \sqrt{\det (g_{ij})},$$

donde $g_{ij} = \langle w_i, w_j \rangle$. *Indicación:* Aplíquese el problema 4-3 a cierto subespacio $(n-1)$-dimensional de $\mathbf{R}^n$.

4 - 11. Si T es un producto interior en V, una aplicación lineal $f\colon V \to V$ se denomina **auto-adjunta** (respecto a T) si $T(x,f(y)) = T(f(x),y)$ para $x,y \in V$. Si $v_1, \ldots, v_n$ es una base ortonormal y $A = (a_{ij})$ es la matriz de T respecto a esta base, probar que $a_{ij} = a_{ji}$.

4 - 12. Si $f_1, \ldots, f_{n-1}\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, se define $f_1 \times \ldots \times f_{n-1}\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ por

$$f_1 \times \ldots \times f_{n-1}(p) = f_1(p) \times \ldots \times f_{n-1}(p).$$

Utilícese el problema 2-14 para deducir una fórmula para $D(f_1 \times \ldots \times f_{n-1})$.

CAMPOS Y FORMAS

Si $p \in \mathbf{R}^n$, el conjunto de todos los pares (p,v), para $v \in \mathbf{R}^n$, se indica por $\mathbf{R}^n{}_p$, y se denomina **espacio tangente** $\mathbf{R}^n$ en p. Este conjunto se transforma de manera muy sencilla en espacio vectorial definiendo

$$(p,v) + (p,w) = (p, v + w),$$
$$a \cdot (p,v) = (p,av).$$

Un vector $v \in \mathbf{R}^n$ se representa frecuentemente por medio de una flecha de 0 a v; el vector $(p,v) \in \mathbf{R}^n{}_p$ se puede representar (fig. 4-1) por una flecha con la misma longitud y dirección, pero con origen en p. Esta flecha va del punto p al punto $p + v$, y por tanto se define $p + v$ como el **punto extremo** de (p,v). Corrientemente se escribirá v_p en vez de (p,v) (se lee: vector v en p).

El espacio vectorial $\mathbf{R}^n{}_p$ está tan íntimamente unido al $\mathbf{R}^n$ que muchas de las estructuras en $\mathbf{R}^n$ tienen análogas en $\mathbf{R}^n{}_p$. En particular el **producto interior usual** $\langle , \rangle_p$ para $\mathbf{R}^n{}_p$ se define por $\langle v_p, w_p \rangle_p = \langle v,w \rangle$, y la **orientación usual** para $\mathbf{R}^n{}_p$ es $[(e_1)_p, \ldots, (e_n)_p]$.

Cada operación que es posible en un espacio vectorial puede realizarse en cada $\mathbf{R}^n{}_p$, y la mayor parte de esta sección no es más que una elaboración de este tema. Casi la más simple operación en un espacio vectorial es la selección de un vector de él. Si esta selección se hace en cada $\mathbf{R}^n{}_p$, se obtiene un **campo vectorial** (Fig. 4-2). Precisando, un campo vectorial es una función F tal que $F(p) \in \mathbf{R}^n{}_p$ para cada $p \in \mathbf{R}^n$. Para cada p existen números $F^1(p), \ldots, F^n(p)$ tales que

$$F(p) = F^1(p) \cdot (e_1)_p + \cdots + F^n(p) \cdot (e_n)_p.$$

Se obtienen así n **funciones componentes** $F^i\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. El campo vectorial F se denomina continuo, diferenciable, etc., si las funciones F^i lo son. Definiciones análogas se pueden dar para un campo vectorial definido sólo en un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$. Operaciones con vectores conducen a operaciones con campos

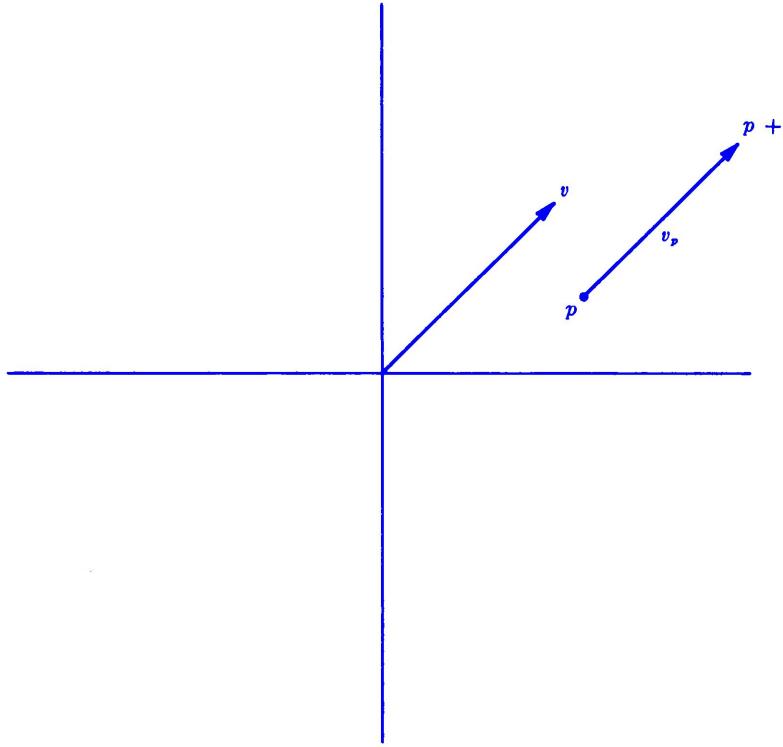


FIGURA 4-1

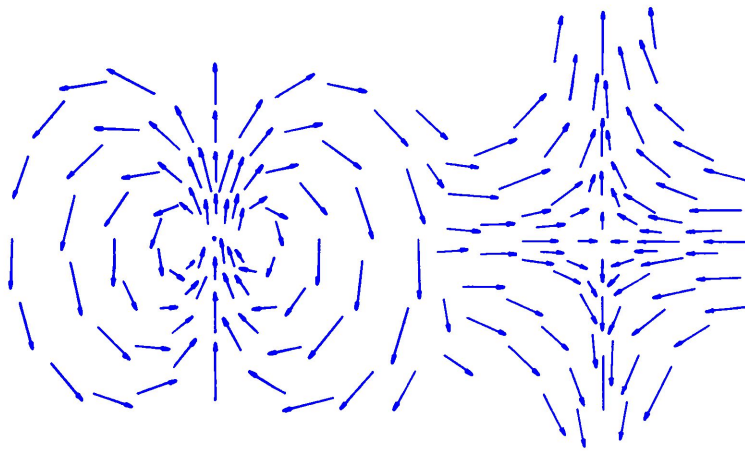


FIGURA 4-2

vectoriales cuando se aplican a cada punto por separado. Por ejemplo, si F y G son campos vectoriales y f es una función, se define

$$\begin{aligned}(F + G)(p) &= F(p) + G(p),\\ \langle F,G\rangle(p) &= \langle F(p),G(p)\rangle,\\ (f \cdot F)(p) &= f(p)F(p).\end{aligned}$$

Si $F_1,\ldots,F_{n-1}$ son campos vectoriales en $\mathbf{R}^n$, entonces se puede análogamente definir

$$(F_1 \times \cdots \times F_{n-1})(p) = F_1(p) \times \cdots \times F_{n-1}(p).$$

Algunas otras definiciones son típicas y útiles. Se define la **divergencia,** div F de F, como $\sum_{i=1}^{n} D_i F^i$. Si se introduce el simbolismo formal

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} D_i \cdot e_i,$$

se puede escribir, simbólicamente, div $F = \langle \nabla,F\rangle$. Si $n = 3$ se escribe de acuerdo con este simbolismo,

$$\begin{aligned}(\nabla \times F)(p) = {} & (D_2F^3 - D_3F^2)(e_1)_p\\ & + (D_3F^1 - D_1F^3)(e_2)_p\\ & + (D_1F^2 - D_2F^1)(e_3)_p.\end{aligned}$$

El campo vectorial $\nabla \times F$ se denomina rotacional F. Los nombres «divergencia» y «rotacional» proceden de consideraciones físicas que se expondrán al final de este libro.

Consideraciones análogas pueden hacerse sobre una función ω con $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbf{R}^n_p)$; una tal función se denomina **forma de orden k** en $\mathbf{R}^n$, o simplemente **k-forma** o **forma diferencial.** Si $\varphi_1(p),\ldots,\varphi_n(p)$ es la base dual de $(e_1)_p,\ldots,(e_n)_p$, entonces

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k}(p) \cdot [\varphi_{i_1}(p) \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}(p)]$$

para ciertas funciones $\omega_{i_1},\ldots,_{i_k}$; la forma ω se denomina continua, diferenciable, etc., si lo son estas funciones. Corrientemente se supondrá tácitamente que las formas y los campos vectoriales son diferenciables, y «diferenciables» significará en lo sucesivo que son de la clase «C^∞»; ésta es una hipótesis de simplificación que elimina la necesidad de contar cuántas veces es diferenciable una función en una demostración. La suma $\omega + \eta$, el producto $f \cdot \omega$, y el producto

exterior $\omega \wedge \eta$ se definen de la manera obvia. Una función f se considera como una forma de orden 0 y $f \cdot \omega$ se escribe también $f \wedge \omega$.

Si f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es diferenciable, entonces $Df(p) \in \Lambda^1(\mathbf{R}^n)$. Con una modificación insignificante se obtiene por tanto una 1-forma df, definida por

$$df(p)(v_p) = Df(p)(v).$$

Considérese en particular la 1-forma $d\pi^i$. Es costumbre indicar la *función* π^i por x^i. (En $\mathbf{R}^3$ frecuentemente x^1, x^2, x^3 se designan por x, y, z.) Esta notación típica tiene desventajas manifiestas pero permite expresar muchos resultados clásicos por medio de fórmulas de igual apariencia clásica. Puesto que $dx^i(p)(v_p) = d\pi^i(p)(v_p) = D\pi^i(p)(v) = v^i$, se ve que $dx^1(p), \ldots, dx^n(p)$ es precisamente la base dual de $(e_1)_p, \ldots, (e_n)_p$. Así cada k-forma ω se puede escribir

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

La expresión para df tiene particular interés.

4-7. Teorema. *Si* f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *es diferenciable, entonces*

$$df = D_1 f \cdot dx^1 + \cdots + D_n f \cdot dx^n.$$

Con la notación clásica,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n.$$

Demostración. $df(p)(v_p) = Df(p)(v) = \Sigma_{i=1}^n v^i \cdot D_i f(p)$
$= \Sigma_{i=1}^n dx^i(p)(v_p) \cdot D_i f(p)$. ∎

Si se considera ahora una función diferenciable f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ se tiene una transformación lineal $Df(p)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Otra sencilla modificación da lugar a una aplicación lineal f : $\mathbf{R}^n{}_p \to \mathbf{R}^m{}_{f(p)}$ definida por

$$f_*(v_p) \doteq (Df(p)(v))_{f(p)}.$$

Esta aplicación lineal induce una aplicación lineal f^*: $\Lambda^k(\mathbf{R}^m{}_{f(p)}) \to \Lambda^k(\mathbf{R}^n{}_p)$. Si ω es una k-forma en $\mathbf{R}^m$ se puede por tanto definir una k-forma $f^*\omega$ en $\mathbf{R}^n$ por $(f^*\omega)(p) = f^*(\omega(p))$. Recuérdese que esto significa que si $v_1, \ldots, v_k \in \mathbf{R}^n{}_p$, entonces se tiene $f^*\omega(p)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(f(p))(f_*(v_1), \ldots, f_*(v_k))$. Como un antídoto de lo abstracto de estas definiciones se presenta un teorema, sumarizando las propiedades importantes de f^*, que permite cálculos explícitos de $f^*\omega$.

4-8. Teorema. *Si* f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *es diferenciable, entonces*

(1) $f^*(dx^i) = \Sigma_{j=1}^n D_j f^i \cdot dx^j = \Sigma_{j=1}^n \dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}\, dx^j$.

(2) $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$.

(3) $f^*(g \cdot \omega) = (g \circ f) \cdot f^*\omega$.

(4) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$.

Demostración

$$\begin{aligned}(1)\ f^*(dx^i)(p)(v_p) &= dx^i(f(p))(f_* v_p)\\ &= dx^i(f(p))(\Sigma_{j=1}^n v^j \cdot D_j f^1(p), \ldots, \Sigma_{j=1}^n v^j \cdot D_j f^m(p))_{f(p)}\\ &= \Sigma_{j=1}^n v^j \cdot D_j f^i(p)\\ &= \Sigma_{j=1}^n D_j f^i(p) \cdot dx^j(p)(v_p).\end{aligned}$$

Las demostraciones de (2), (3), (4), se dejan para el lector. ∎

Aplicando repetidamente el teorema 4-8 se tiene, por ejemplo,

$$\begin{aligned}f^*(P\, dx^1 \wedge dx^2 + Q\, dx^2 \wedge dx^3) = {} & (P \circ f)[f^*(dx^1) \wedge f^*(dx^2)]\\ & + (Q \circ f)[f^*(dx^2) \wedge f^*(dx^3)].\end{aligned}$$

La expresión obtenida desarrollando cada $f^*(dx^i)$ es muy complicada. (Es útil recordar, sin embargo, que se tiene $dx^i \wedge dx^i = (-1)\, dx^i \wedge dx^i = 0$.) En un caso especial valdrá la pena hacer una evaluación explícita.

4-9. Teorema. *Si* f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *es diferenciable, entonces*

$$f^*(h\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = (h \circ f)(\det f')\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Demostración. Puesto que

$$f^*(h\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = (h \circ f) f^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n),$$

basta probar que

$$f^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = (\det f')\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Sea $p \in \mathbf{R}^n$ y sea $A = (a_{ij})$ la matriz de $f'(p)$. Aquí, y siempre que no dé lugar a confusión, se omitirá «p» en $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n(p)$, etc. Entonces

$$\begin{aligned} f^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(e_1, \ldots, e_n) &= dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n(f_* e_1, \ldots, f_* e_n) \\ &= dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\Big(\sum_{i=1}^n a_{1i}e_i, \ldots, \sum_{i=1}^n a_{ni}e_i\Big) \\ &= \det(a_{ij}) \cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n(e_1, \ldots, e_n), \end{aligned}$$

en virtud del teorema 4-6. ∎

Una construcción importante asociada a formas es una generalización del operador d que cambia formas de orden 0 en formas de orden 1. Si

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

se define una forma $(k+1)$ $d\omega$, la **diferencial** de ω por

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} d\omega_{i_1, \ldots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \sum_{\alpha=1}^n D_\alpha(\omega_{i_1, \ldots, i_k}) \cdot dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}. \end{aligned}$$

4 - 10. Teorema

(1) $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$.
(2) *Si* ω *es una k-forma y* η *es una l-forma, entonces*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{kl}\omega \wedge d\eta.$$

(3) $d(d\omega) = 0$. *Abreviadamente,* $d^2 = 0$.
(4) *Si* ω *es una k-forma en* $\mathbf{R}^m$ *y* f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *es diferenciable, entonces* $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

Demostración

(1) Se deja para el lector.
(2) La fórmula es cierta si $\omega = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ y $\eta = dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l}$, puesto que todos los términos se anulan. La fórmula se comprueba fácilmente cuando ω es una forma de orden 0. La fórmula general se puede deducir de (1) y de estas dos observaciones.
(3) Puesto que

$$d\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha(\omega_{i_1,\ldots,i_k}) dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

se tiene

$$d(d\omega) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} D_{\alpha,\beta}(\omega_{i_1,\ldots,i_k}) dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

En estas sumas los términos

$$D_{\alpha,\beta}(\omega_{i_1,\ldots,i_k}) dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

y

$$D_{\beta,\alpha}(\omega_{i_1,\ldots,i_k}) dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

se anulan a pares.

(4) Esto es claro si ω es una forma de orden 0. Supóngase, inductivamente, que (4) es cierto cuando ω es una k-forma. Basta probar (4) para una $(k+1)$-forma del tipo $\omega \wedge dx^i$. Se tiene

$$\begin{aligned} f^*(d(\omega \wedge dx^i)) &= f^*(d\omega \wedge dx^i + (-1)^k \omega \wedge d(dx^i)) \\ &= f^*(d\omega \wedge dx^i) = f^*(d\omega) \wedge f^*(dx^i) \\ &= d(f^*\omega \wedge f^*(dx^i)) \\ &= d(f^*(\omega \wedge dx^i)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Una forma ω se denomina **cerrada** si $d\omega = 0$ y **exacta** si $\omega = d\eta$, para una cierta η. El teorema 4-10 muestra que toda forma exacta es cerrada, y es natural preguntar, recíprocamente, si cada forma cerrada es exacta. Si ω es la forma de orden $1, P\,dx + Q\,dy$ en $\mathbf{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} d\omega &= (D_1 P\,dx + D_2 P\,dy) \wedge dx + (D_1 Q\,dx + D_2 Q\,dy) \wedge dy \\ &= (D_1 Q - D_2 P) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Así, si $d\omega = 0$, entonces $D_1 Q = D_2 P$. Los problemas 2-21 y 3-34 muestran que existe una forma f de orden 0 tal que $\omega = df = D_1 f dx + D_2 f dy$. Si ω está definida sólo en un subconjunto de $\mathbf{R}^2$, puede ocurrir que una tal función no exista. El ejemplo clásico es la forma

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

definido en $\mathbf{R}^2 - 0$. Esta forma se acostumbra a indicar por $d\theta$ (donde θ está definida en el problema 3-41), puesto que (problema 4-21) es igual a $d\theta$ en el conjunto $\{(x,y) : x < 0$, o $x \geq 0$ y $y \neq 0\}$, donde θ está definida. Obsérvese, sin embargo, que θ no puede estar definida con continuidad en todo $\mathbf{R}^2 - 0$. Si $\omega = df$ para alguna función $f : \mathbf{R}^2 - 0 \to \mathbf{R}$, entonces, $D_1 f = D_1\theta$ y $D_2 f = D_2\theta$, así que $f = \theta +$ constante, lo que muestra que una tal f no puede existir.

Supóngase que $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot dx^i$ es una 1-forma en $\mathbf{R}^n$ y ω resulta ser igual a $df = \sum_{i=1}^{n} D_i f \cdot dx^i$. Se puede, evidentemente, suponer que $f(0) = 0$. Como en el problema 2-35, se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} D_i f(tx) \cdot x^i\, dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \omega_i(tx) \cdot x^i\, dt. \end{aligned}$$

Esto sugiere que para encontrar f, dada ω, se considere la función $I\omega$, definida por

$$I\omega(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \omega_i(tx) \cdot x^i\, dt.$$

Obsérvese que la definición de $I\omega$ tiene sentido si ω está definida sólo en un conjunto abierto $A \subset \mathbf{R}^n$ con la propiedad de que siempre que $x \in A$, el segmento de recta de 0 a x esté contenido en A; un conjunto abierto con esta propiedad se dice que tiene **forma de estrella** respecto a 0 (Figura 4-3). Unos cálculos un tanto enredados prueban que (en un conjunto abierto con forma de estrella) se tiene $\omega = d(I\omega)$ siempre que ω satisfaga la condición necesaria $d\omega = 0$. El cálculo así como la definición de $I\omega$, pueden generalizarse considerablemente:

4-11. Teorema. (Lema de Poincaré.) *Si $A \subset \mathbf{R}^n$ es un conjunto abierto con forma de estrella respecto de 0, entonces toda forma cerrada en A es exacta.*

Demostración. Se define una función I en la que a cada l-forma le corresponde una $(l-1)$ forma (para cada l), tal que $I(0) = 0$ y $\omega = I(d\omega) + d(I\omega)$ para cada forma ω. Se deduce que $\omega = d(I\omega)$ si $d\omega = 0$. Sea

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_l} \omega_{i_1, \ldots, i_l}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l}.$$

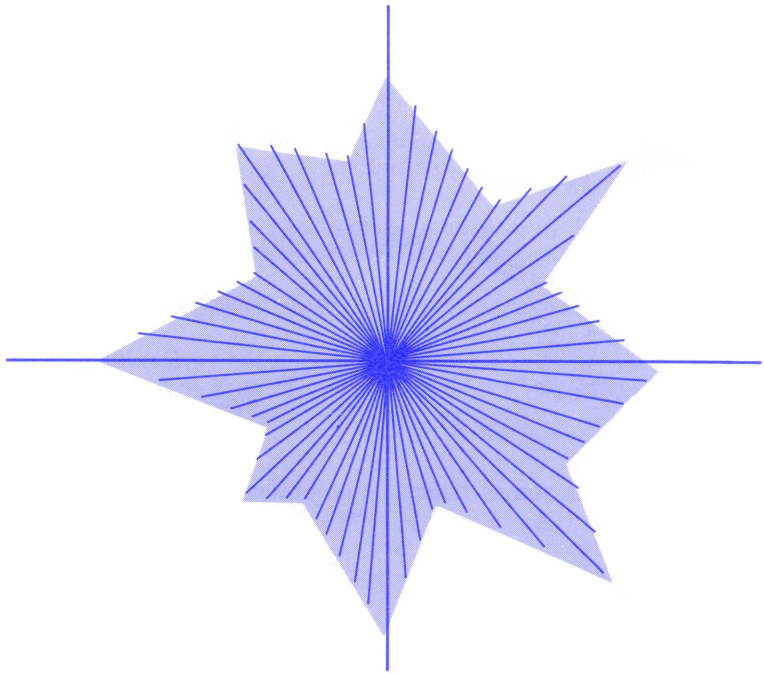


FIGURA 4-3

Puesto que A tiene forma de estrella se puede definir

$$I\omega(x) = \sum_{i_1 < \cdots < i_l} \sum_{\alpha=1}^{l} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx)dt \right) x^{i_\alpha} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l}.$$

(El símbolo $\widehat{\ }$ sobre dx^{i_α} indica que este término se omite.) La demostración de que $\omega = I(d\omega) + d(I\omega)$ se hace mediante cálculo: Se tiene, utilizando el problema 3-32,

$$d(I\omega) = l \cdot \sum_{i_1 < \cdots < i_l} \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx)dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l}$$

$$+ \sum_{i_1 < \cdots < i_l} \sum_{\alpha=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1,\ldots,i_l})(tx)dt \right) x^{i_\alpha} \, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l}.$$

(Explíquese por qué se tiene el factor t^l, en vez del factor t^{l-1}.) Se tiene también

$$d\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_l} \sum_{j=1}^{n} D_j(\omega_{i_1,\ldots,i_l}) \cdot dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l}.$$

Aplicando I a la $(l+1)$-forma $d\omega$, se obtiene

$$I(d\omega) = \sum_{i_1 < \cdots < i_l} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1,\ldots,i_l})(tx)dt \right) x^j \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l}$$

$$- \sum_{i_1 < \cdots < i_l} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{l} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1,\ldots,i_l})(tx)dt \right) x^{i_\alpha} \, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l}.$$

Sumando se eliminan las sumas triples, y se obtiene

$$\begin{aligned} d(I\omega) + I(d\omega) &= \sum_{i_1 < \cdots < i_l} l \cdot \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx)dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l} \\ &\quad + \sum_{i_1 < \cdots < i_l} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^l x^j D_j(\omega_{i_1,\ldots,i_l})(tx)dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l} \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_l} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} [t^l \omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx)]dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l} \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_l} \omega_{i_1,\ldots,i_l} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l} \\ &= \omega. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Problemas. **4 - 13.** (a) Si f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ y g: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$, probar que

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \quad \text{y} \quad (g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

(b) Si f,g: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, probar que $d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df$.

4 - 14. Sea c una curva diferenciable en $\mathbf{R}^n$, es decir una función diferenciable c: $[0,1] \to R^n$. Se define el **vector tangente** v a c en t como $c_*((e_1)_t) = ((c^1)'(t), \ldots, (c^n)'(t))_{c(t)}$. Si f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, probar que el vector tangente a $f \circ c$ en t es $f_*(v)$.

4 - 15. Sea f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y se define c: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ por $c(t) = (t, f(t))$. Probar que el extremo del vector tangente a c en t pertenece a la tangente a la gráfica de f en $(t, f(t))$.

4 - 16. Sea c: $[0,1] \to \mathbf{R}^n$ una curva tal que $c(t) = 1$ para todo t. Probar que $c(t)_{c(t)}$ y el vector tangente a c en t son perpendiculares.

4 - 17. Si f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, se define un campo vectorial $\mathbf{f}$ por $\mathbf{f}(p) = f(p)_p \in \mathbf{R}^n{}_p$.

(a) Probar que cada campo vectorial F en $\mathbf{R}^n$ es de la forma $\mathbf{f}$ para algún f.

(b) Probar que div $\mathbf{f}$ = traza f'.

4 - 18. Si f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, se define el campo vectorial grad f por

$$(\text{grad } f)(p) = D_1 f(p) \cdot (e_1)_p + \cdots + D_n f(p) \cdot (e_n)_p.$$

Por razones obvias se escribe también grad $f = \nabla f$. Si $\nabla f(p) = w_p$, probar que $D_v f(p) = \langle v, w \rangle$ y concluir que $\nabla f(p)$ es la dirección en la que f varía más rápidamente en p.

4 - 19. Si F es un campo vectorial en $\mathbf{R}^3$, se definen las formas

$$\begin{aligned} \omega_F^1 &= F^1\,dx + F^2\,dy + F^3\,dz, \\ \omega_F^2 &= F^1\,dy \wedge dz + F^2\,dz \wedge dx + F^3\,dx \wedge dy, \\ \omega_F^3 &= (F^1 + F^2 + F^3)\,dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

(a) Probar que

$$\begin{aligned} df &= \omega^1_{\text{grad } f}, \\ d(\omega_F^1) &= \omega^2_{\text{rot } F}, \\ d(\omega_F^2) &= \omega^3_{\text{div } F}. \end{aligned}$$

(b) Utilícese (a) para probar que

$$\begin{aligned} \text{rot grad } f &= 0, \\ \text{div rot } F &= 0. \end{aligned}$$

(c) Si F es un campo vectorial en conjunto A abierto de forma de estrella y rot $F = 0$, probar que $F = \text{grad } f$ para una cierta función f: $A \to \mathbf{R}$. Análogamente, si div $F = 0$, probar que $F = \text{rot } G$ para un cierto campo vectorial G en A.

4 - 20. Sea f: $U \to \mathbf{R}^n$ una función diferenciable con una inversa diferenciable f^{-1}: $f(U) \to \mathbf{R}^n$. Supóngase que cada forma cerrada en $f(U)$ es exacta. **Probar** lo mismo para U. *Indicación:* Si $d\omega = 0$ y $f^*\omega = d\eta$, considérese $(f^{-1})^*\eta$.

4 - 21.* Probar que en el conjunto en el que θ está definida, se tiene

$$d\theta = \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy.$$

PRELIMINARES GEOMÉTRICOS

Un **cubo singular n** dimensional, o en forma breve **n-cubo,** en A es una función $c : [0,1]^n \to A$ (aquí $[0,1]^n$ representa el producto de n factores $[0,1] \times \ldots \times [0,1]$). Es costumbre representar $\{0\}$ por $\mathbf{R}^0$ y por $[0,1]^0$. Un 0-cubo singular en A es pues una función $f : \{0\} \to A$, o lo que es lo mismo, un punto en A. Un 1-cubo singular se denomina frecuentemente **curva.** Un ejemplo muy simple, pero par-

ticularmente importante de un n-cubo singular en $\mathbf{R}^n$ es el **n-cubo típico** $I^n : [0,1]^n \to \mathbf{R}^n$ definido por $I^n(x) = x$ para $x \in [0,1]^n$.

Será preciso considerar sumas formales de n-cubos singulares en A multiplicados por enteros, es decir, expresiones como

$$2c_1 + 3c_2 - 4c_3,$$

donde c_1, c_2, c_3 son n-cubos singulares en A. Estas sumas de n-cubos singulares con coeficientes enteros se denominan **cadenas n** dimensionales, o simplemente **n-cadenas** en A. En particular un n-cubo singular c se considera también como una n-cadena $1 \cdot c$. Es clara la manera de sumar y multiplicar por enteros las n-cadenas. Por ejemplo

$$2(c_1 + 3c_4) + (-2)(c_1 + c_3 + c_2) = -2c_2 - 2c_3 + 6c_4.$$

(Una exposición rigurosa de este formalismo se presenta en el problema 4-22.)

Para cada n-cadena singular c en A se define una $(n-1)$-cadena en A denominada la **frontera** de c y se indica por ∂c. La frontera de I^2, por ejemplo, se puede definir como la suma de cuatro 1-cubos singulares colocados en sentido contrario al de las agujas del reloj alrededor de la frontera de $[0,1]^2$, como se indica en la Fig. 4-4(a). Efectivamente es mucho más conveniente definir ∂I^2 como la suma de los cuatro 1-cubos singulares presentados en la Fig. 4-4(b) con los coeficientes indicados. La definición precisa de ∂I^n requiere algunas nociones preliminares. Para cada i donde $1 \leq i \leq n$ se definen dos $(n-1)$-cubos singulares $I^n_{(i,0)}$ y $I^n_{(i,1)}$ como sigue. Si $x \in [0,1]^{n-1}$, entonces

$$\begin{aligned} I^n_{(i,0)}(x) &= I^n(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^i, \ldots, x^{n-1}) \\ &= (x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^i, \ldots, x^{n-1}), \\ I^n_{(i,1)}(x) &= I^n(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^i, \ldots, x^{n-1}) \\ &= (x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^i, \ldots, x^{n-1}). \end{aligned}$$

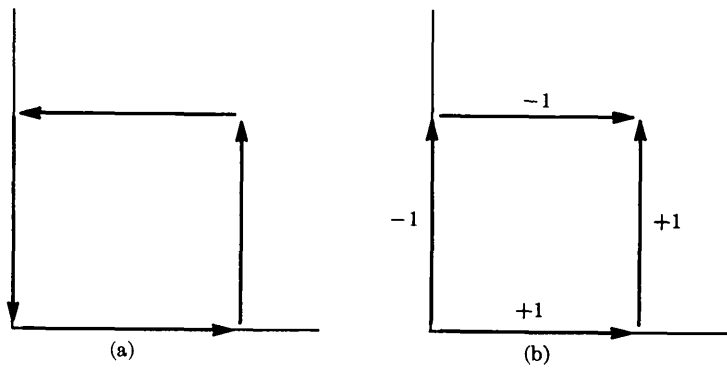


FIGURA 4-4

$I^n_{(i,0)}$ se denomina la $(i,0)$-cara de I^n y $I^n_{(i,1)}$ la $(i,1)$-cara (fig. 4-5). Entonces se define

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} I^n_{(i,\alpha)}.$$

Para un n-cubo singular general $c : [0,1]^n \longrightarrow A$ se define en primer lugar la (i,α)-cara

$$c_{(i,\alpha)} = c \circ (I^n_{(i,\alpha)})$$

y después se define

$$\partial c = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}.$$

Finalmente se define la frontera de una n-cadena $\Sigma a_i c_i$ por

$$\partial(\Sigma a_i c_i) = \Sigma a_i \partial(c_i).$$

Aunque estas pocas definiciones son suficientes para todas las aplicaciones en este libro, se incluye aquí una propiedad típica de ∂.

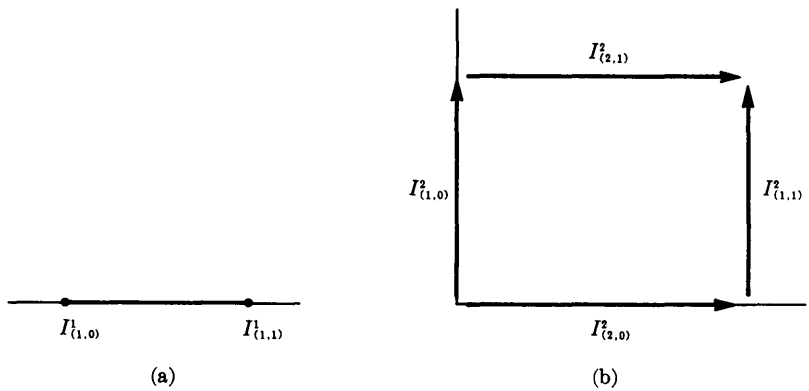


FIGURA 4-5

4-12. Teorema. *Si c es una n-cadena en A, entonces $\partial(\partial c) = 0$. Abreviadamente, $\partial^2 = 0$.*

Demostración. Sea $i \leq j$ y considérese $(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$. Si $x \in [0,1]^{n-2}$, entonces recordando la definición de la (j,β)-cara de un n-cubo singular, se tiene

$$\begin{aligned}(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}(x) &= I^n_{(i,\alpha)}(I^{n-1}_{(j,\beta)}(x)) \\ &= I^n_{(i,\alpha)}(x^1, \ldots, x^{j-1}, \beta, x^j, \ldots, x^{n-2}) \\ &= I^n(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \ldots, x^{j-1}, \beta, x^j, \ldots, x^{n-2}).\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}(I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)} &= I^n_{(j+1,\beta)}(I^{n-1}_{(i,\alpha)}(x)) \\ &= I^n_{(j+1,\beta)}(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \ldots, x^{n-2}) \\ &= I^n(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \ldots, x^{j-1}, \beta, x^j, \ldots, x^{n-2}).\end{aligned}$$

Así $(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} = (I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$ para $i \leq j$. (Para comprobar esto puede ayudar la figura 4-5.) Se deduce fácilmente para cada n-cubo singular c que $(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} = (c_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$ cuando $i \leq j$. Ahora

$$\begin{aligned}\partial(\partial c) &= \partial\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{i+\alpha}c_{(i,\alpha)}\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0,1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\beta=0,1}(-1)^{i+\alpha+j+\beta}(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}.\end{aligned}$$

En estas sumas $(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$ y $(c_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$ aparecen con signos opuestos. Por lo tanto todos los términos se simplifican a pares y $\partial(\partial c) = 0$. Puesto que el teorema es cierto para cada n-cubo singular, es cierto también para n-cadenas singulares. ∎

Es natural preguntar si el teorema 4-12 tiene recíproco: Si $\partial c = 0$, ¿existe una cadena d en A tal que $c = \partial d$? La respuesta depende de A y en general es «no». Por ejemplo, se define $c: [0,1] \to \mathbf{R}^2 - 0$ por $c(t) = (\text{sen } 2\pi nt, \cos 2\pi nt)$, donde n es un entero no nulo. Entonces $c(1) = c(0)$, de manera que $\partial c = 0$. Pero (Problema 4-26) no existe ninguna 2-cadena c' en $\mathbf{R}^2 - 0$, con $\partial c' = c$.

Problemas. **4 - 22.** Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todos los n-cubos singulares, y $\mathbf{Z}$ el de los enteros. Una **n-cadena** es una función $f: \mathcal{S} \to \mathbf{Z}$ tal que $f(c) = 0$ para todo c salvo un número finito. Se define $f + g$ y nf por $(f+g)(c) = f(c) + g(c)$ y $nf(c) = n \cdot f(c)$. Probar que $f + g$ y nf están en $\mathcal{S}$. Si $c \in \mathcal{S}$, se indica por c la función f con $f(c) = 1$ y $f(c') = 0$ para $c' \neq c$. Probar que cada n-cadena f puede escribirse en la forma $a_1c_1 + \ldots + a_kc_k$ para ciertos enteros $a_1, \ldots, a_k$ y n-cubos singulares $c_1, \ldots c_k$.

4 - 23. Para $R > 0$ y $n \neq 0$, se define el 1-cubo singular $c_{R,n}$: $[0,1] \to \mathbf{R}^2 - 0$ por $c_{R,n}(t) = (R \cos 2\pi nt, R \text{ sen } 2\pi nt)$. Probar también que existe un 2-cubo singular c: $[0,1]^2 \to \mathbf{R}^2 - 0$ tal que $c_{R_1,n} - c_{R_2,n} = \partial c$.

4 - 24. Si c es un 1-cubo singular en $\mathbf{R}^2 - 0$ con $c(0) = c(1)$, probar que existe un entero n tal que $c - c_{1,n} = \partial c^2$ para alguna 2-cadena c^2. *Indicación:* Primero partición $[0,1]$ de manera que cada $c([t_{i-1},t_i])$ esté contenido en un lado de alguna recta que pasa por 0.

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

El hecho que sean $d^2 = 0$ y $\partial^2 = 0$, dejando aparte la analogía tipográfica entre d y ∂, sugiere una conexión entre cadenas y formas. Esta conexión se establece por integración de las formas sobre cadenas. En lo sucesivo sólo se considerarán n-cubos diferenciables.

Si ω es una k-forma en $[0,1]^k$, entonces $\omega = f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$ para una función f única. Se define

$$\int_{[0,1]^k} \omega = \int_{[0,1]^k} f.$$

Lo que también se podría escribir de la siguiente forma

$$\int_{[0,1]^k} f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k = \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, x^k)dx^1 \cdots dx^k,$$

lo que es una de las razones para introducir las funciones x^i.

Si ω es una k-forma en A y c es un k-cubo singular en A, se define

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^*\omega.$$

Obsérvese en particular que,

$$\begin{aligned}\int_{I^k} f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k &= \int_{[0,1]^k} (I^k)^*(f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k) \\ &= \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, x^k)dx^1 \cdots dx^k.\end{aligned}$$

Para $k = 0$ se debe dar una definición especial. Una 0-forma ω es una función; si $c : \{0\} \to A$ es un 0-cubo singular en A se define

$$\int_c \omega = \omega(c(0)).$$

La integral de ω sobre una k-cadena $c = \Sigma a_i c_i$ está definida por

$$\int_c \omega = \sum a_i \int_{c_i} \omega.$$

La integral de una 1-forma sobre una 1-cadena se acostumbra a denominar **integral de línea.** Si $P\,dx + Q\,dy$ es una 1-forma en $\mathbf{R}^2$ y $c : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ es un 1-cubo singular (una curva), entonces se puede (pero no se hará) probar que

$$\int_c P\,dx + Q\,dy = \lim \sum_{i=1}^{n} [c^1(t_i) - c^1(t_{i-1})] \cdot P(t^i) + [c^2(t_i) - c^2(t_{i-1})] \cdot Q(t^i)$$

donde $t_0, \ldots, t_n$ es una partición de $[0,1]$, la elección de t^i en $[t_{i-1}, t_i]$ es arbitraria, y el límite se toma sobre todas las particiones cuando el máximo de $|t_i - t_{i-1}|$ tiende hacia 0. El segundo miembro se acostumbra a tomar como definición de $\int_c P\,dx + Q\,dy$. Esta es una definición que parece natural, puesto que estas sumas son muy análogas a las sumas que aparecen en la definición de las integrales ordinarias. Sin embargo, una expresión de este tipo es la mayor parte de veces imposible de manejar, por lo que inmediatamente se considera la integral equivalente $\int_{[0,1]} c^*(P\,dx + Q\,dy)$. Definiciones análogas para **integrales de superficie,** es decir, integrales de 2-formas sobre 2-cubos singulares, son todavía más complicadas y difíciles de manejar. Éste es uno de los motivos por lo que se ha evitado esta introducción. La otra razón es que la definición dada aquí es la que tiene sentido en la situación más general considerada en el capítulo 5.

La relación entre formas, cadenas, d y ∂ está compendiada de la forma más clara posible en el teorema de Stokes, llamado algunas veces el teorema fundamental del Cálculo en dimensiones de orden superior (si $k = 1$ y $c = I^1$, éste es realmente el teorema fundamental del Cálculo).

4 - 13. Teorema. (Teorema de Stokes.) *Si ω es una $(k-1)$-forma en A y c es una k-cadena en A, entonces*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Demostración. Supóngase en primer lugar que $c = I^k$ y ω es una $(k-1)$-forma en $[0,1]^k$. Entonces ω es la suma de $(k-1)$-formas del tipo

$$f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k,$$

y basta probar el teorema para cada una de ellas. Se trata simplemente de un cálculo:

Obsérvese que

$$\int_{[0,1]^{k-1}} I^k_{(j,\alpha)}{}^*(f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ \displaystyle\int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, \alpha, \ldots, x^k)dx^1 \cdots dx^k & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Por tanto

$$\int_{\partial I^k} f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} I^k_{(j,\alpha)}{}^*(f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k)$$

$$= (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, 1, \ldots, x^k)dx^1 \cdots dx^k + (-1)^i \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, 0, \ldots, x^k)dx^1 \cdots dx^k.$$

Por otra parte

$$\int_{I^k} d(f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k) = \int_{[0,1]^k} D_i f\,dx^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} D_i f.$$

En virtud del teorema de Fubini y del teorema fundamental del cálculo (en una dimensión), se tiene

$$\int_{I^k} d(f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k)$$

$$= (-1)^{i-1} \int_0^1 \cdots \left(\int_0^1 D_i f(x^1, \ldots, x^k)dx^i \right) dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^k$$

$$= (-1)^{i-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 [f(x^1, \ldots, 1, \ldots, x^k) - f(x^1, \ldots, 0, \ldots, x^k)]dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^k$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, 1, \ldots, x^k)dx^1 \cdots dx^k + (-1)^i \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, 0, \ldots, x^k)dx^1 \cdots dx^k.$$

Por tanto

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k} \omega.$$

Si c es un k-cubo singular arbitrario, manejando las definiciones se prueba

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial I^k} c^*\omega.$$

Por tanto

$$\int_c d\omega = \int_{I^k} c^*(d\omega) = \int_{I^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Finalmente, si c es una k-cadena $\Sigma a_i c_i$ se tiene

$$\int_c d\omega = \sum a_i \int_{c_i} d\omega = \sum a_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial c} \omega. \blacksquare$$

El teorema de Stokes goza de tres importantes atributos que son propios de la mayoría de los grandes teoremas.

1. Es trivial.
2. Es trivial porque los términos que aparecen en él han sido definidos de manera adecuada.
3. Tiene consecuencias significativas.

Puesto que este capítulo ha sido poco más que una serie de definiciones que han hecho posible el enunciado y demostración del teorema de Stokes, el lector podrá conceder espontáneamente los dos primeros atributos al teorema de Stokes. El resto del libro está destinado a justificar el tercero.

Problemas. **4 - 25.** (*Independencia de la elección de parámetros.*) Sea c un k-cubo singular y p: $[0,1]^k \to [0,1]^k$ una función 1-1 tal que $p([0,1]^k) = [0,1]^k$ y $\det p'(x) \geqq 0$ para $x \in [0,1]^k$. Si ω es una k-forma, probar que

$$\int_c \omega = \int_{c \circ p} \omega.$$

4 - 26. Probar que $\int_{c_{R,n}} d\theta = 2\pi n$, y utilizar el teorema de Stokes para concluir que $c_{R,n} \neq \partial c$ para cada 2-cadena c en $\mathbf{R}^2 - 0$ (recuérdese la definición de $c_{R,n}$ en el problema 4-23).

4 - 27. Probar que el entero n del problema 4-24 es único. Este entero se denomina **número de vueltas** de c alrededor de 0.

4 - 28. Recuérdese que el conjunto de los números complejos $\mathbf{C}$ es simplemente el $\mathbf{R}^2$ con $(a,b) = a + bi$. Si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$ sea f: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ igual a $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$. Se define el 1-cubo singular $c_{R,f}$: $[0,1] \to \mathbf{C} - 0$ por $c_{R,f} = f \circ c_{R,1}$, y el 2-cubo singular c por $c(s,t) = t \cdot c_{R,n}(s) + (1 - t)c_{R,f}(s)$.

(a) Probar que $\partial c = c_{R,f} - c_{R,n}$, y que $c([0,1] \times [0,1]) \subset \mathbf{C} - 0$ si R es suficientemente grande.

(b) Utilizando el problema 4-26, probar el *teorema fundamental del Algebra:* Cada polinomio $z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ con $a_i \in \mathbf{C}$ tiene una raíz en $\mathbf{C}$.

4 - 29. Si ω es una 1-forma $f\,dx$ en $[0,1]$ con $f(0) = f(1)$, probar que existe un número único λ tal que $\omega - \lambda\,dx = dg$ para una función g con $g(0) = g(1)$. *Indicación:* Integrar $\omega - \lambda\,dx = dg$ para hallar λ.

4 - 30. Si ω es una 1-forma en $\mathbf{R}^2 - 0$ tal que $d\omega = 0$, probar que

$$\omega = \lambda\,d\theta + dg$$

para ciertos $\lambda \in \mathbf{R}$ y g: $\mathbf{R}^2 - 0 \to \mathbf{R}$. *Indicación:* Si

$$c_R{}^*(\omega) = \lambda_R\,dx + d(g_R),$$

probar que todos los números λ_R tienen el mismo valor λ.

4 - 31. Si $\omega \neq 0$, probar que existe una cadena c tal que $\int_c \omega \neq 0$. Utilizar este hecho, el teorema de Stokes y $\partial^2 = 0$ para demostrar $d^2 = 0$.

4 - 32. (a) Sean c_1, c_2 1-cubos singulares con $c_1(0) = c_2(0)$ y $c_1(1) = c_2(1)$. Probar que existe un 2-cubo singular c tal que $\partial c = c_1 - c_2 + c_3 + c_4$ donde c_3 y c_4 son *degenerados*, es decir, $c_3([0,1])$ y $c_4([0,1])$ son puntos. Concluir que $\int_{c_1}\omega = \int_{c_2}\omega$ si ω es exacta. Dar un contraejemplo en $\mathbf{R}^2 - 0$ si ω es simplemente cerrada.

(b) Si ω es una forma en un subconjunto de $\mathbf{R}^2$ y $\int_{c_1}\omega = \int_{c_2}\omega$ para todo c_1, c_2 con $c_1(0) = c_2(0)$ y $c_1(1) = c_2(1)$, probar que ω es exacta. *Indicación:* Considérense los problemas 2-21 y 3-34.

4 - 33. (*Un cursillo sobre funciones de variables complejas.*) Si f: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, se dice que f es **diferenciable** en $z_0 \in \mathbf{C}$ si existe el límite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

(Este cociente encierra dos números complejos y esta definición es completamente diferente de la del Capítulo 2.) Si f es diferenciable en cada punto z de un conjunto abierto A y f' es continua en A, entonces f se denomina **analítica** en A.

(a) Probar que $f(z) = z$ es analítica y que $f(z) = \bar{z}$ no lo es (donde $\overline{x+iy} = x - iy$). Probar que la suma, producto, y cociente de funciones analíticas son analíticas.

(b) Si $f = u + iv$ es analítica en A, probar que u y v satisfacen las ecuaciones de *Cauchy-Riemann:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x}.$$

Indicación: Utilícese el hecho que $\lim_{z \to z_0} f(z) - f(z_0)/(z - z_0)$ ha de ser el mismo para $z = z_0 + (x + i \cdot 0)$ y $z = z_0 + (0 + i \cdot y)$ con $x, y \to 0$. (El recíproco es también cierto si u y v son diferenciables con continuidad; la demostración de esta parte es más difícil.)

(c) Sea T: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ una aplicación lineal (donde $\mathbf{C}$ se considera como un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$). Si la matriz de T con respecto a la base $(1,i)$ es $\begin{pmatrix} a,b \\ c,d \end{pmatrix}$ probar que T es la multiplicación por un número complejo si y sólo si $a = d$ y $b = -c$. La parte (b) muestra que una función analítica f: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, considerada como una función f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, tiene una diferencial $Df(z_0)$ que es la multiplicación por un número complejo. ¿Qué número complejo es?

(d) Se define

$$d(\omega + i\eta) = d\omega + i\,d\eta,$$
$$\int_c \omega + i\eta = \int_c \omega + i \int_c \eta,$$

$$(\omega + i\eta) \wedge (\theta + i\lambda) = \omega \wedge \theta - \eta \wedge \lambda + i(\eta \wedge \theta + \omega \wedge \lambda),$$

y

$$dz = dx + i\,dy.$$

Probar que $d(f \cdot dz) = 0$ si y sólo si f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

(e) Probar el *teorema de la Integral de Cauchy:* Si f es analítica en A, entonces $\int_c f\,dz = 0$ para cada curva cerrada c (1-cubo singular con $c(0) = c(1)$) tal que $c = \partial c'$ para alguna 2-cadena c' en A.

(f) Probar que si $g(z) = 1/z$, entonces $g \cdot dz$ (o $(1/z)dz$ en la notación clásica) es igual a $i\,d\theta + dh$ para una función h: $\mathbf{C} - 0 \to \mathbf{R}$. Concluir que $\int_{c_{R,n}} (1/z)dz = 2\pi i n$.

(g) Si f es analítica en $\{z\colon |z| < 1\}$, utilizar el hecho de que $g(z) = (z)/z$ es analítica en $\{z\colon 0 < |z| < 1\}$ para probar que

$$\int_{c_{R_1,n}} \frac{f(z)}{z}\,dz = \int_{c_{R_2,n}} \frac{f(z)}{z}\,dz$$

si $0 < R_1$, $R_2 < 1$. Utilícese (f) para calcular $\lim_{R \to 0} \int_{c_{R,n}} f(z)/z\,dz$ y concluir:

Fórmula Integral de Cauchy: Si f es analítica en $\{z\colon |z| \leq 1\}$ y c es una curva cerrada en $\{z\colon 0 < |z| < 1\}$ con número n de vueltas alrededor de 0, entonces

$$n \cdot f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z}\,dz.$$

4-34. Si F: $[0,1]^2 \to \mathbf{R}^3$ y $s \in [0,1]$ se define F_s: $[0,1] \to \mathbf{R}^3$ por $F_s(t) = F(s,t)$. Si cada F_s es una curva cerrada, F se denomina **homotopía** entre la curva cerrada F_0 y la curva cerrada F_1. Supóngase que F y G son homotopías de curvas cerradas; si para cada s las curvas cerradas F_s y G_s no se cortan, el par (F,G) se denomina homotopía entre las curvas cerradas no secantes F_0, G_0 y F_1, G_1. Es intuitivamente obvio que no existe una tal homotopía en la que F_0, G_0 sean el par de curvas que se presentan en la Fig. 4-6 (a)), y F_1, G_1 el par de (b) o (c). Este problema y el problema 5-33 prueban esto para (b), pero la demostración para (c) requiere otras técnicas.

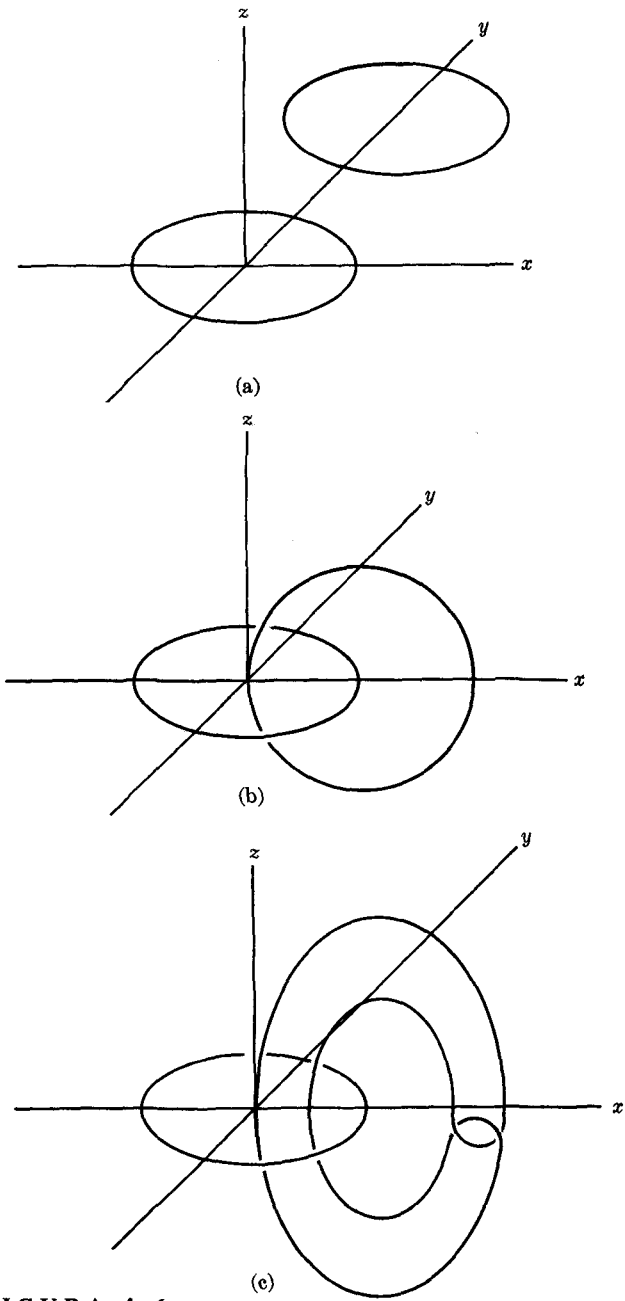


FIGURA 4-6

(a) Si f,g: $[0,1] \to \mathbf{R}^2$ son curvas cerradas no secantes se define $c_{f,g}$: $[0,1]^2 \to \mathbf{R}^2 - 0$ por

$$c_{f,g}(u,v) = f(u) - g(v).$$

Si (F,G) es una homotopía de curvas cerradas no secantes definidas $C_{F,G}$: $[0,1]^3 \to \mathbf{R}^3 - 0$ por

$$C_{F,G}(s,u,v) = c_{F_s,G_s}(u,v) = F(s,u) - G(s,v).$$

Probar que

$$\partial C_{F,G} = c_{F_0,G_0} - c_{F_1,G_1}.$$

(b) Si ω es una 2-forma cerrada en $\mathbf{R}^3 - 0$ probar que

$$\int_{c_{F_0},G_0} \omega = \int_{c_{F_1},G_1} \omega.$$

5

Integración en variedades

VARIEDADES

Si U y V son conjuntos abiertos en $\mathbf{R}^n$, una función diferenciable $h\colon U \to V$ con una inversa diferenciable $h^{-1}\colon V \to U$ se denominará un **difhomomorfismo.**

Un subconjunto M de $\mathbf{R}^n$ se denomina **variedad k-dimensional** (en $\mathbf{R}^n$) si para cada punto $x \in M$ se cumple la siguiente condición:

(M) Existe un conjunto abierto U que contiene x, un conjunto abierto $V \subset \mathbf{R}^n$, y un difhomomorfismo $h\colon U \to V$ tal que

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbf{R}^k \times \{0\}) = \{x \in V : x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\}.$$

En otras palabras, $U \cap M$ es, simplemente, $\mathbf{R}^k \times \{0\}$ «salvo difhomomorfismos» (ver Fig. 5-1). Se exponen los dos casos extremos de la definición: un punto en $\mathbf{R}^n$ es una variedad 0-dimensional, y un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$ es una variedad n-dimensional.

Un ejemplo corriente de una variedad n-dimensional es la **n-esfera** S^n, definida por $\{x \in \mathbf{R}^{n+1}\colon |x| = 1\}$. Se deja al lector el probar que se cumple la condición (M). Sin embargo, si no se desea entretenerse con detalles, se puede utilizar el siguiente teorema que proporciona muchos ejemplos de variedades (obsérvese que $S^n = g^{-1}(0)$, donde $g\colon \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ está definida por $g(x) = |x|^2 - 1$).

5-1. Teorema. *Sea $A \subset \mathbf{R}^n$ abierto y sea $g\colon A \to \mathbf{R}^p$ una función diferenciable*

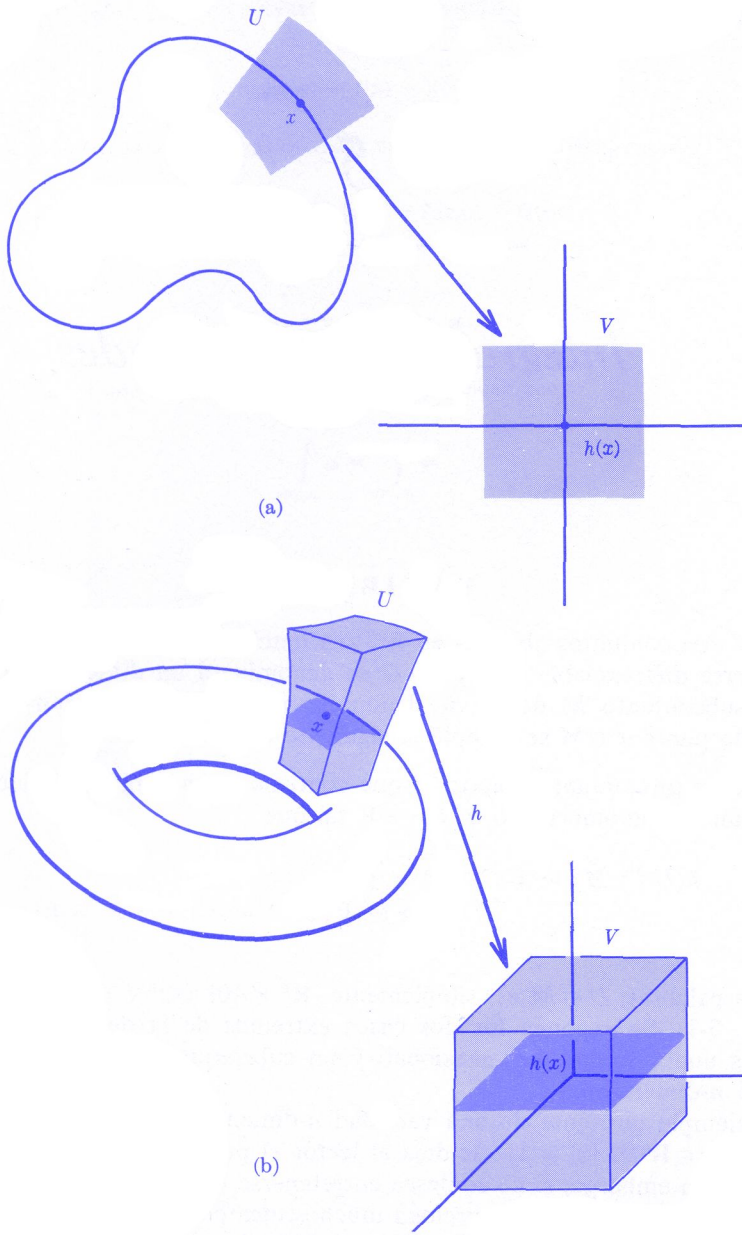


FIGURA 5-1

Una variedad unidimensional en $\mathbf{R}^2$ *y una variedad bidimensional en* $\mathbf{R}^3$.

tal que $g'(x)$ tenga rango p siempre que $g(x) = 0$. Entonces $g^{-1}(0)$ es una variedad de dimensión $(n - p)$ en $\mathbf{R}^n$.

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema 2-13. ▮

Existe una caracterización alternativa de variedades que es muy importante.

5 - 2. Teorema. *Un subconjunto M de $\mathbf{R}^n$ es una variedad k-dimensional si y sólo si para cada punto $x \in M$ se verifica la siguiente «condición de coordenadas»:*

(C) Existe un conjunto abierto U que contiene x, y un conjunto abierto $W \subset \mathbf{R}^k$, y una función 1-1 diferenciable $f: W \to \mathbf{R}^n$ tal que

(1) $f(W) = M \cap U$,
(2) $f'(y)$ *tiene rango k para cada* $y \in W$.

[Una tal función f se denomina **sistema de coordenadas** alrededor de a, o entorno de a (ver Fig. 5-2).]

Demostración. Si M es una variedad k-dimensional en $\mathbf{R}^n$, se elige $h: U \to V$ que satisfaga (M). Sea $W = \{a \in \mathbf{R}^k: (a,0) \in h(M)\}$ y se define $f: W \to \mathbf{R}^n$ por $f(a) = h^{-1}(a,0)$. Evidentemente $f(W) = M \cap U$. Si $H: U \to \mathbf{R}^k$ es $H(z) = (h^1(z), \ldots, h^k(z))$, entonces $H(f(y)) = y$ para todo $y \in W$; por tanto, $H'(f(y)) \cdot f'(y) = I$ y $f'(y)$ ha de tener rango k.

Supóngase, recíprocamente, que $f: W \to \mathbf{R}^n$ satisface la condición (C). Se puede evidentemente suponer que la matriz $(D_j f^i(x))$, $1 \leq i, j \leq k$ tiene determinante distinto de cero. Se define $g: W \times \mathbf{R}^{n-k} \to \mathbf{R}^n$ por $g(a,b) = f(a) + (0,b)$. Entonces

$$g'(x) = \begin{pmatrix} f'(x) & \begin{matrix} 0 \\ \hline \end{matrix} \\ & \mathrm{I} \end{pmatrix},$$

así $\det g'(x,y) \neq 0$. En virtud del teorema 2-11 existe un conjunto abierto V_1 que contiene $(x,0)$ y un conjunto abierto V_2 que contiene $g(x,0) = f(x)$ tales que $g: V_1 \to V_2$ tiene una inversa diferenciable $h: V_2 \to V_1$. Entonces

$$\begin{aligned} h(V_2 \cap M) = g^{-1}(V_2 \cap M) &= g^{-1}(\{g(x,0): x \in V_1\}) \\ &= V_1 \cap (R^k \times \{0\}). \end{aligned}$$ ▮

Es interesante observar una consecuencia de la demostración del teorema 5-2. Si $f_1: W_1 \to \mathbf{R}^n$ y $f_2: W_2 \to \mathbf{R}^n$ son dos sistemas de coordenadas, entonces

$$f_2^{-1} \circ f_1: f_1^{-1}(f_2(W_2)) \to \mathbf{R}^k$$

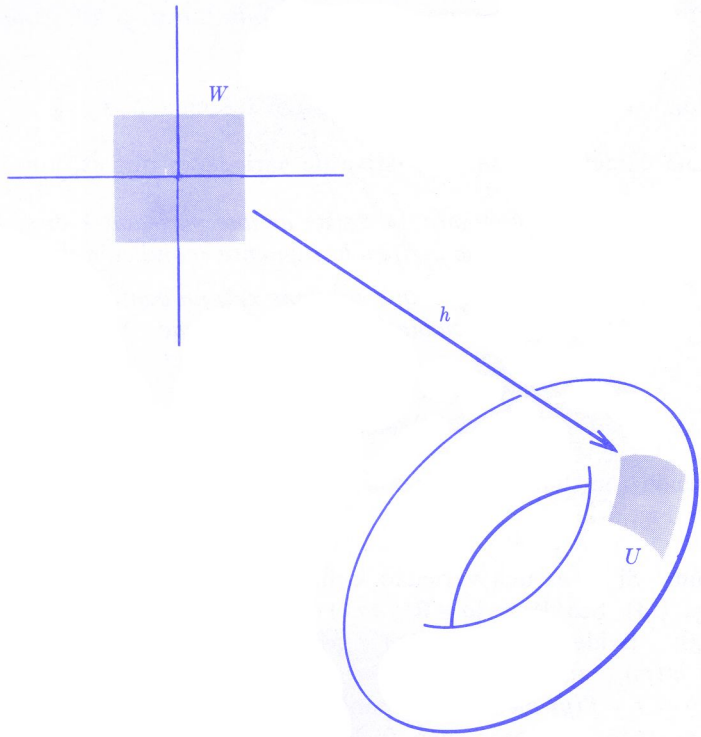


FIGURA 5-2

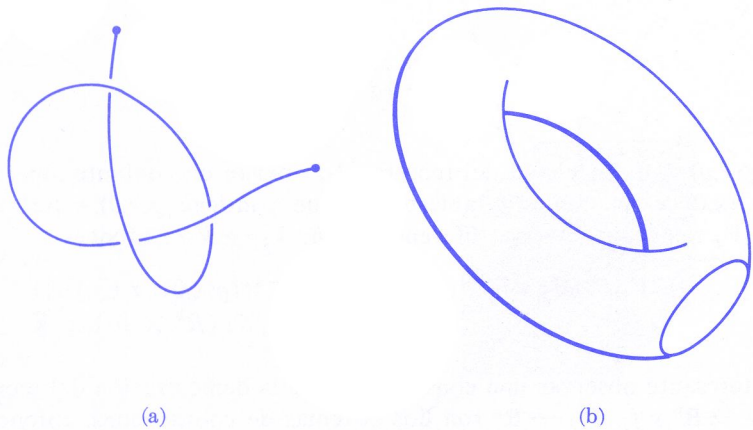


FIGURA 5-3

Una variedad con frontera unidimensional y una bidimensional en $\mathbf{R}^3$.

es diferenciable con jacobiano no singular. En efecto, $f_2^{-1}(x)$ consiste en las k primeras componentes de $h(x)$.

El **semi-espacio** $\mathbf{H}^k \subset \mathbf{R}^k$ se define por $\{x \in \mathbf{R}^k\colon x^k \geq 0\}$. Un subconjunto M de $\mathbf{R}^n$ es una **variedad con frontera k-dimensional** (Fig. 5-3) si para cada punto $x \in M$ se satisface o la condición (M) o la condición siguiente:

(M') Existe un conjunto abierto U que contiene x, un conjunto abierto $V \subset \mathbf{R}^n$, y un difhomomorfismo $h\colon U \to V$ tales que

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbf{H}^k \times \{0\})$$
$$= \{x \in V\colon x^k \geq 0 \quad \text{y} \quad x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\}.$$

Es importante observar que las condiciones (M) y (M') no pueden verificarse ambas para un mismo x. En efecto, si $h_1\colon U_1 \to V_1$ y $h_2\colon U_2 \to V_2$ satisfacen (M) y (M') respectivamente, entonces $h_2 \circ h_1^{-1}$ sería una aplicación diferenciable que transformaría un conjunto abierto en $\mathbf{R}^k$, que contiene $h(x)$ en un subconjunto de $\mathbf{H}^k$ que no es abierto en $\mathbf{R}^k$. Puesto que $\det (h_2 \circ h_1^{-1})' \neq 0$, esto contradice el problema 2-36. El conjunto de todos los puntos $x \in M$ para los que se satisface la condición M' se denomina la **frontera** de M y se indica por M. Este conjunto no debe confundirse con la frontera de un conjunto que se definió en el Capítulo 1 (ver problemas 5-3 y 5-8).

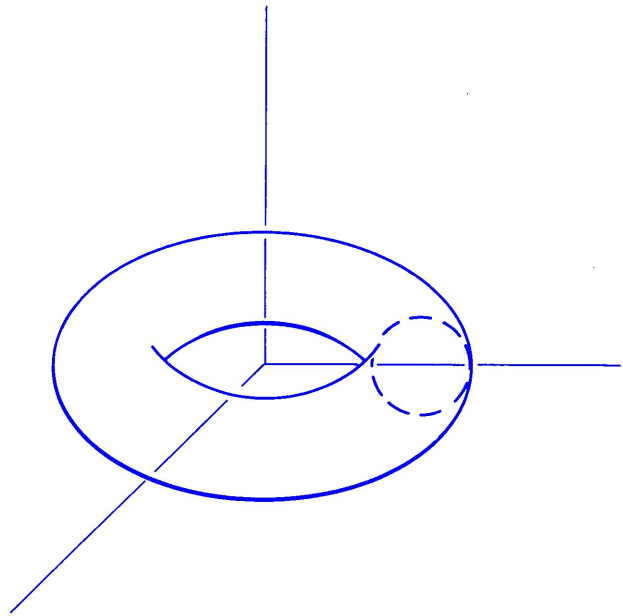


FIGURA 5-4

Problemas. **5 - 1.** Si M es una variedad k-dimensional con frontera, probar que ∂M es una variedad $(k-1)$ dimensional y $M - \partial M$ es una variedad k-dimensional.

5 - 2. Probar una condición análoga a la condición (C) para variedades con frontera.

5 - 3. (a) Sea $A \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto tal que su frontera A sea una variedad $(n-1)$-dimensional. Probar que $N = A \cup$ frontera A es una variedad n-dimensional con frontera. (Es bueno tener presente el siguiente ejemplo: si $A = \{x \in \mathbf{R}^n: |x| < 1 \text{ o } 1 < |x| < 2\}$ entonces $N = A \cup$ frontera A es una variedad con frontera, pero $\partial N \neq$ frontera A.)

(b) Probar una afirmación análoga para un subconjunto abierto de una variedad n-dimensional.

5 - 4. Probar un recíproco parcial del teorema 5-1: Si $M \subset \mathbf{R}^n$ es una variedad k-dimensional y $x \in M$, entonces existe un conjunto abierto $A \subset \mathbf{R}^n$ y una función $g: A \to \mathbf{R}^{n-k}$ tal que $A \cap M = g^{-1}(0)$ y $g'(x)$ tiene rango $n-k$ si $g(x) = 0$.

5 - 5. Probar que un subespacio (vectorial) k-dimensional de $\mathbf{R}^n$ es una variedad k-dimensional.

5 - 6. Si $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, el **gráfico** de f es $\{(x,y): y = f(x)\}$. Probar que el gráfico de f es una variedad n-dimensional si y sólo si f es diferenciable.

5 - 7. Sea $\mathbf{K}^n = \{x \in \mathbf{R}^n: x^1 = 0 \text{ y } x^2, \ldots, x^{n-1} > 0\}$. Si $M \subset \mathbf{K}^n$ es una variedad k-dimensional y N se obtiene haciendo girar M alrededor del eje $x^1 = \ldots = x^k = 0$, probar que N es una variedad $(k+1)$-dimensional. Ejemplo: el toro (Fig. 5-4).

5 - 8. (a) Si M es una variedad k-dimensional en $\mathbf{R}^n$ y $k < n$, probar que M tiene medida 0.

(b) Si M es una variedad cerrada n-dimensional con frontera en $\mathbf{R}^n$, probar que la frontera de M es ∂M. Dar un contraejemplo si M no es cerrado.

(c) Si M es una variedad compacta n-dimensional con frontera en $\mathbf{R}^n$, probar que M es medible Jordan.

CAMPOS Y FORMAS EN VARIEDADES

Sea M una variedad k-dimensional en $\mathbf{R}^n$ y sea $f: W \to \mathbf{R}^n$ un sistema de coordenadas alrededor de $x = f(a)$. Puesto que $f'(a)$ tiene rango k, la transformación lineal $f_*: \mathbf{R}^k{}_a \to \mathbf{R}^n{}_x$ es 1-1, y $f_*(\mathbf{R}^k{}_a)$ es un subespacio k-dimensional de $\mathbf{R}^n{}_x$. Si $g: V \to \mathbf{R}^n$ es otro sistema de coordenadas, con $x = g(b)$, entonces

$$g_*(\mathbf{R}^k{}_b) = f_*(f^{-1} \circ g)_*(\mathbf{R}^k{}_b) = f_*(\mathbf{R}^k{}_a).$$

Por tanto, el subespacio k-dimensional $f_*(\mathbf{R}^k{}_a)$ no depende del sistema de coordenadas f. Este subespacio se designa por M_x, y se denomina el **espacio tangente** de M en x (ver Fig. 5-5). En secciones posteriores se utilizará el hecho de que existe un producto interior natural T_x en M_x inducido por el de $\mathbf{R}^n{}_x$: si $v, w \in M_x$ se define $T_x(v,w) = \langle v,w \rangle_x$.

Supóngase que A es un conjunto abierto que contenga a M, y F es un campo vectorial diferenciable en A tal que $F(x) \in M_x$ para cada $x \in M$. Si $f: W \to \mathbf{R}^n$ es un sistema de coordenadas, existe un único campo vectorial (diferenciable) G en W tal que $f_*(G(a)) = F(f(a))$ para cada $a \in W$. Se puede también considerar

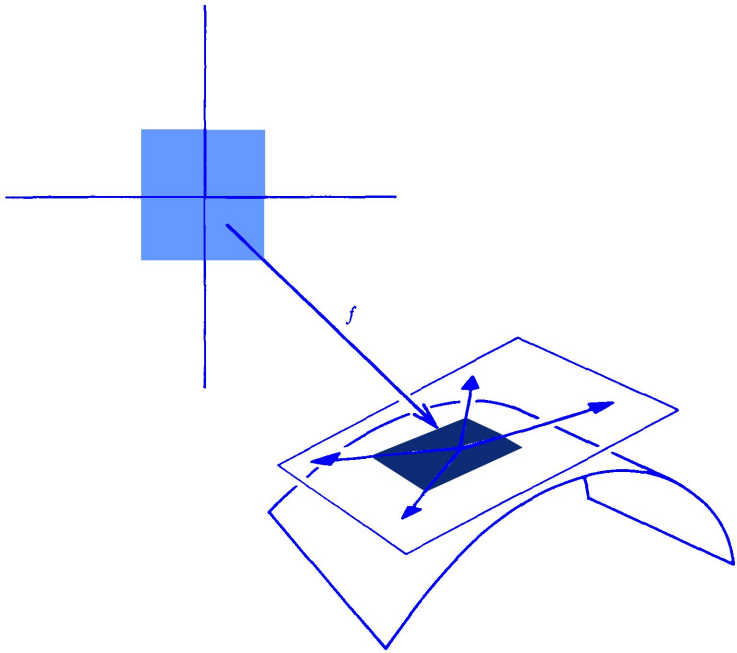


FIGURA 5-5

una función F la cual asigna simplemente un vector $F(x) \in M_x$ a cada $x \in M$; una función de esta naturaleza se denomina un **campo vectorial en** M. Existe sin embargo un único campo vectorial G en W tal que $f_*(G(a)) = F(f(a))$ para $a \in W$; se *define* F como diferenciable, si G es diferenciable. Obsérvese que esta definición no depende del sistema de coordenadas elegido: si g: $V \to \mathbf{R}^n$ y $g_*(H(b)) = F(b)$ para todo $b \in V$, entonces las funciones componentes de $H(b)$ han de ser iguales a las funciones componentes de $G(f^{-1}(g(b)))$, de manera que H es diferenciable si G lo es.

Exactamente las mismas consideraciones valen para formas. Una función ω que asigna $\omega(x) \in \Lambda^p(M_x)$ a cada $x \in M$ se denomina una **p-forma en M.** Si f: $W \to \mathbf{R}^n$ es un sistema de coordenadas, entonces $f^*\omega$ es una p-forma en W; se *define* ω como diferenciable, si $f^*\omega$ lo es. Una p-forma ω en M se puede escribir

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \omega_{i_1, \ldots, i_p} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

Aquí las funciones $\omega_{i_1}, \ldots, {}_{i_p}$ están definidas sólo en M. La definición de $d\omega$ dada anteriormente carece aquí de sentido, puesto que $D_i(\omega_{i_1}, \ldots, {}_{i_p})$ no tiene significado. No obstante, existe un camino razonable para definir $d\omega$.

5-3. Teorema. *Existe una única* $(p+1)$*-forma* $d\omega$ *en* M *tal que para cada sistema de coordenadas* $f: W \to \mathbf{R}^n$ *se tiene*

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega).$$

Demostración. Si $f: W \to \mathbf{R}^n$ es un sistema de coordenadas con $x = f(a)$ y $v_1, \ldots, v_{p+1} \in M_x$ existen unas únicas $w_1, \ldots, w_{p+1}$ en $\mathbf{R}^k{}_a$ tales que $f_*(w_i) = v_i$. Se define $d\omega(x)(v_1, \ldots, v_{p+1}) = d(f^*\omega)(a)(w_1, \ldots, w_{p+1})$. Se puede comprobar que esta definición de $d\omega(x)$ no depende del sistema de coordenadas f, de manera que $d\omega$ está bien definida. Además, es claro que $d\omega$ ha de ser definida de esta forma, para que $d\omega$ sea única. ∎

Es frecuentemente necesario elegir una orientación μ_x para cada espacio tangente M_x de una variedad M. Estas elecciones se denominan **consistentes** (Figura 5-6) siempre que para cada sistema de coordenadas $f: W \to \mathbf{R}^n$ y $a, b \in W$ la relación

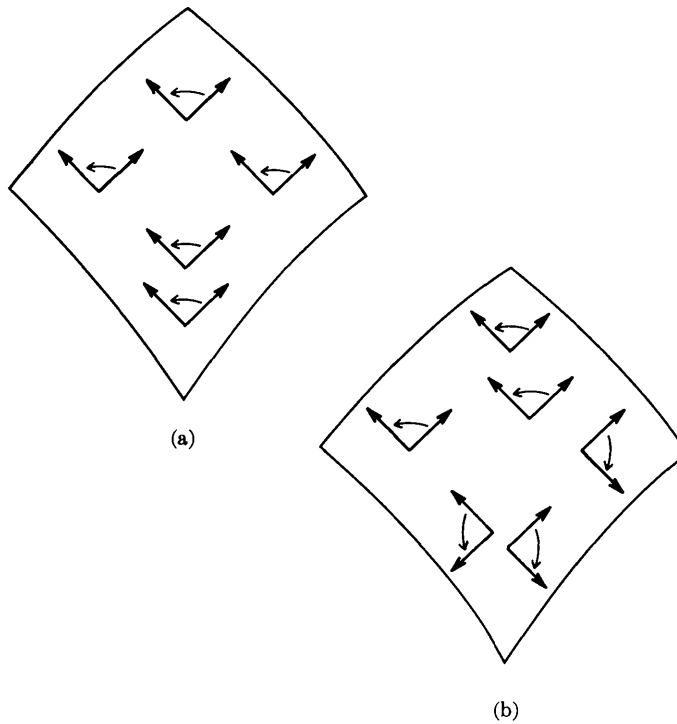


FIGURA 5-6

Elecciones de orientación (a) consistente, (b) inconsistente.

$$[f_*((e_1)_a), \ldots, f_*((e_k)_a)] = \mu_{f(a)}$$

se verifica si y sólo si

$$[f_*((e_1)_b), \ldots, f_*((e_k)_b)] = \mu_{f(b)}.$$

Supóngase que se han elegido las orientaciones μ_x consistentes. Si f: $W \to \mathbf{R}^n$ es un sistema de coordenadas tal que

$$[f_*((e_1)_a), \ldots, f_*((e_k)_a)] = \mu_{f(a)}$$

para uno, y por tanto para cada $a \in W$, entonces f se dice que **conserva la orientación.** Si f *no* conserva la orientación, y T: $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ es una transformación lineal con det $T = -1$, entonces $f \circ T$ *conserva* la orientación. Por tanto existe un sistema de coordenadas alrededor de cada punto que conserva la orientación. Si f y g conservan la orientación y $x = f(a) = g(b)$, entonces la relación

$$[f_*((e_1)_a), \ldots, f_*((e_k)_a)] = \mu_x = [g_*((e_1)_b), \ldots, g_*((e_k)_b)]$$

implica que

$$[(g^{-1} \circ f)_*((e_1)_a), \ldots, (g^{-1} \circ f)_*((e_k)_a)] = [(e_1)_b, \ldots, (e_k)_b],$$

de manera que det $(g^{-1} \circ f)' > 0$, hecho importante que hay que recordar.

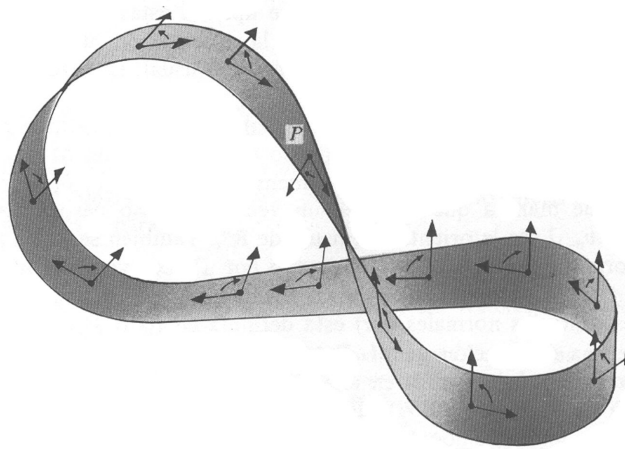


FIGURA 5-7

La banda de Möbius, una variedad no orientable. Una base empieza en P, se mueve hacia la derecha, y dando la vuelta, vuelve a P con orientación opuesta.

Una variedad para la que se pueden elegir orientaciones consistentes μ_x se denomina **orientable,** y una elección particular de μ_x se denomina una **orientación** μ de M. Una variedad junto con una orientación μ se denomina una variedad **orientada.** El ejemplo clásico de una variedad no orientable es la banda de Möbius. Se puede hacer un modelo juntando los extremos de una tira de papel después de haber girado media vuelta a uno de ellos (Fig. 5-7).

Estas definiciones dadas de campos vectoriales, formas y orientaciones pueden darse también para variedades con frontera. Si M es una variedad con frontera k-dimensional y $x \in \partial M$, entonces $(\partial M)_x$ es un subespacio $(k-1)$-dimensional del espacio vectorial k-dimensional M_x. Así hay exactamente dos vectores unidad en M_x que son perpendiculares a $(\partial M)_x$; tales vectores se pueden distinguir como sigue (Fig. 5-8). Si f: $W \to \mathbf{R}^n$ es un sistema de coordenadas con $W \subset H^k$ y $f(0) = x$, entonces sólo uno de estos vectores unidad es $f_*(v_0)$ para cierto v_0 con $v^k < 0$. Este vector unidad se denomina el **vector unitario normal exterior** $n(x)$; no es díficil comprobar que esta definición no depende del sistema de coordenadas f.

Supóngase que μ es una orientación de una variedad k-dimensional M con frontera. Si $x \in \partial M$, se elige $v_1, \ldots, v_{k-1} \in (\partial M)_x$ de manera que $[n(x), v_1, \ldots, v_{k-1}] = \mu_x$. Si también es cierto que $[n(x), w_1, \ldots, w_{k-1}] = \mu_x$, entonces ambas $[v_1, \ldots, v_{k-1}]$ y $[w_1, \ldots, w_{k-1}]$ tienen la misma orientación para $(\partial M)_x$. Esta orientación se indica por $(\partial \mu)_x$. Es fácil probar que las orientaciones $(\partial \mu)_x$ para $x \in \partial M$, son consistentes en ∂M. Así si M es orientable, ∂M es también orientable, y una orientación μ de M determina una orientación $\partial \mu$ para ∂M, llamada la **orientación inducida.** Si se aplican estas definiciones a $\mathbf{H}^k$ con la orientación usual, se encuentra que la orientación inducida en $\mathbf{R}^{k-1} = \{x \in \mathbf{H}^k : x^k = 0\}$ es $(-1)^k$ veces la orientación usual. La razón para esta elección aparecerá clara en la sección siguiente.

Si M es una variedad $(n-1)$ dimensional *orientada* en $\mathbf{R}^n$, se puede definir un sustituto para el vector normal unitario exterior, cuando M no es necesariamente la frontera de una variedad n-dimensional. Si $[v_1, \ldots, v_{n-1}] = \mu_x$, se elige $n(x)$ en $\mathbf{R}^n{}_x$ de manera que $n(x)$ sea un vector unitario perpendicular a M_x y $[n(x), v_1, \ldots, v_{n-1}]$ sea la orientación usual de $\mathbf{R}^n{}_x$. También se llama a $n(x)$ vector unitario normal exterior a M (determinado por μ). Los vectores $n(x)$ varían con continuidad en M, en un sentido obvio. Recíprocamente si una familia continua de vectores unitarios normales $n(x)$ está definida en todo M, entonces se puede determinar una orientación de M. Esto muestra que una elección continua de vectores normales es imposible en una banda de Möbius. En el modelo de papel de la banda de Möbius los dos lados del papel (que tiene espesor) pueden considerarse como los extremos de los vectores normales unitarios en ambas direcciones. La imposibilidad de elegir vectores normales con continuidad se refleja por la famosa propiedad del modelo de papel. El modelo de papel tiene una sola cara (si se empieza pintándolo por una cara se termina habiéndolo pintado todo);

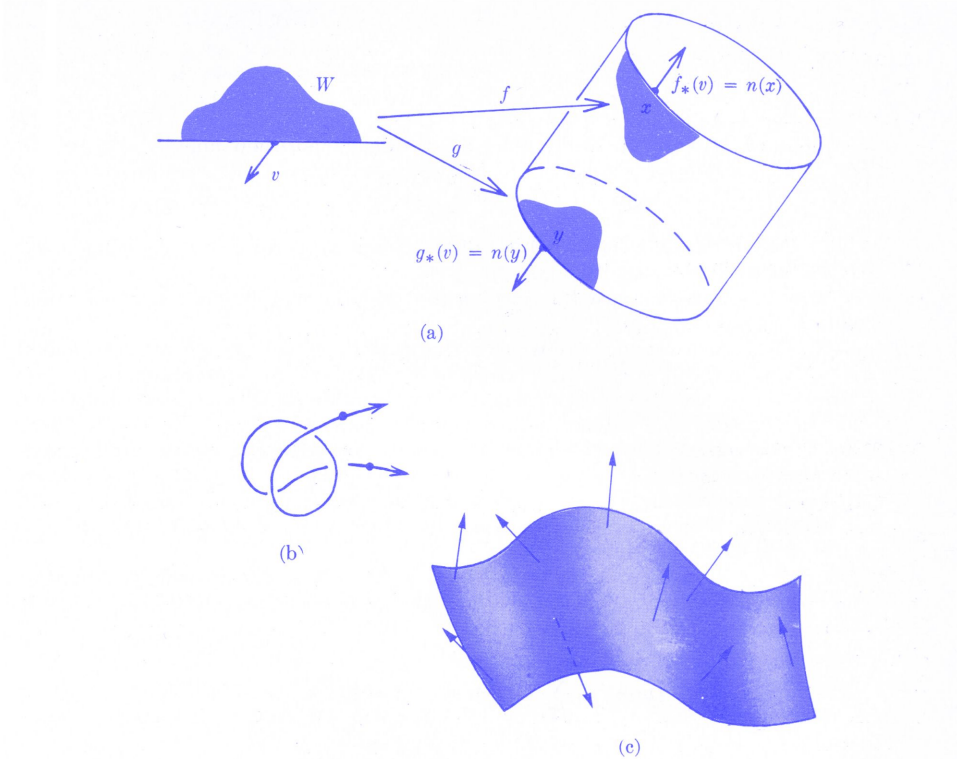


FIGURA 5-8

Algunos vectores unitarios normales exteriores, de variedades con frontera en $\mathbf{R}^3$.

en otras palabras, eligiendo $n(x)$ arbitrariamente en un punto, y luego en los otros puntos por continuidad, al llegar de nuevo al punto inicial se está obligado a la elección opuesta para $n(x)$.

Problemas. **5-9.** Probar que M_x está formado por los vectores tangentes en t a las curvas c en M con $c(t) = x$.

5-10. Se supone que $\mathcal{C}$ es una colección de sistemas de cordenadas para M tal que (1) Para cada $x \in M$ existe $f \in \mathcal{C}$ que es un sistema de coordenadas alrededor de x; (2) si $f,g \in \mathcal{C}$, entonces $\det(f^{-1} \circ g) > 0$. Probar que existe una orientación única de M tal que f conserva la orientación si $f \in \mathcal{C}$.

5-11. Si M es una variedad n-dimensional con frontera en $\mathbf{R}^n$, se define μ_x como la orientación usual de $M_x = \mathbf{R}^n{}_x$ (la orientación μ así definida es la **orientación usual** de M). Si $x \in \partial M$, probar que las dos definiciones de $n(x)$ dadas anteriormente coinciden.

5 - 12. (a) Si F es un campo vectorial diferenciable en $M \subset \mathbf{R}^n$, probar que existe un conjunto abierto $A \supset M$ y un campo vectorial diferenciable $\tilde{F}$ en A con $\tilde{F}(x) = F(x)$ para $x \in M$. *Indicación:* Hacerlo localmente y utilizar particiones de la unidad.

(b) Si M es cerrado, probar que se puede elegir $A = \mathbf{R}^n$.

5 - 13. Sea g: $A \to \mathbf{R}^p$ como en el teorema 5-1.

(a) Si $x \in M = g^{-1}(0)$, sea h: $U \to \mathbf{R}^n$ el difhomomorfismo único esencialmente, tal que $g \circ h(x) = (x^{n-p+1}, \ldots, x^n)$ y $h(0) = x$. Se define f: $\mathbf{R}^{n-p} \to \mathbf{R}^n$ por $f(a) = h(0,a)$. Probar que f_* es 1-1 de manera que $n - p$ vectores $f_*((e_1)_0), \ldots, f_*((e_{n-p})_0)$ son linealmente independientes.

(b) Probar que se pueden definir orientaciones μ_x consistentes, de manera que M sea orientable.

(c) Si $p = 1$, probar que las componentes de la normal exterior en x son múltiplos de $D_1 g(x), \ldots, D_n g(x)$.

5 - 14. Si $M \subset \mathbf{R}^n$ es una variedad k-dimensional orientable, probar que existe g: $A \to \mathbf{R}^{n-k}$ tal que $M = g^{-1}(0)$ y $g'(x)$ tiene rango $n - k$ para $x \in M$. *Indicación:* En el problema 5-4 se hace esto localmente. Utilizar la orientación para elegir soluciones locales consistentes y utilizar particiones de la unidad.

5 - 15. Sea M una variedad $(n - 1)$-dimensional en $\mathbf{R}^n$. Sea $M(\varepsilon)$ el conjunto de los extremos de los vectores normales (en ambas direcciones) de longitud ε y supóngase que ε es suficientemente pequeño para que $M(\varepsilon)$ sea también una variedad $(n - 1)$-dimensional. Probar que $M(\varepsilon)$ es orientable (aunque M no lo sea). ¿Qué es $M(\varepsilon)$ si M es la banda de Möbius?

5 - 16. Sea g: $A \to \mathbf{R}^p$ como en el teorema 5-1. Si f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es diferenciable y el máximo (o mínimo) de f en $g^{-1}(0)$ se presenta en a, probar que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{R}$, tales que

$$(1)\quad D_j f(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D_j g^i(a) \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Indicación: Esta igualdad se puede escribir en la forma $df(a) = \sum_{i=1}^n \lambda_i dg^i(a)$ y es obvio si $g(x) = (x^{n-p+1}, \ldots, x^n)$.

El máximo de f en $g^{-1}(0)$ se denomina algunas veces el máximo de f sujeto o **condicionado** a las **restricciones** $g^i = 0$. Se puede intentar encontrar a resolviendo el sistema de ecuaciones (1). En particular si g: $A \to \mathbf{R}$, se han de resolver $n + 1$ ecuaciones

$$\begin{aligned} D_j f(a) &= \lambda D_j g(a), \\ g(a) &= 0, \end{aligned}$$

en $n + 1$ incógnitas $a^1, \ldots, a^n, \lambda$, que es frecuentemente muy sencillo si se deja la ecuación $g(a) = 0$ para el final. Este es el **método de Lagrange,** y las λ, útiles como auxiliares, se denominan el **multiplicador de Lagrange.** El problema siguiente proporciona una bonita aplicación teórica de los multiplicadores de Lagrange.

5 - 17. (a) Sea T: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ auto-adjunta con matriz $A = (a_{ij})$, de manera que $a_{ij} = a_{ji}$. Si $f(x) = \langle Tx, x \rangle = \sum a_{ij} x^i x^j$, se tiene $D_k f(x) = 2\sum_{i=1}^n a_{kj} x^j$. Considerando el máximo de $\langle Tx, x \rangle$ en S^{n-1} probar que existe $x \in S^{n-1}$ y $\lambda \in \mathbf{R}$ con $Tx = \lambda x$.

(b) Si $V = \{y \in \mathbf{R}^n : \langle x, y \rangle = 0\}$, probar que $T(V) \subset V$ y T: $V \to V$ es auto-adjunta.

(c) Probar que T tiene una base de vectores propios.

TEOREMA DE STOKES EN VARIEDADES

Si ω es una p-forma en una variedad con frontera k-dimensional M y c es un p-cubo singular en M, se define

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^p} c^*\omega$$

precisamente como antes; las integrales sobre p-cadenas se definen también como antes. En el caso $p = k$ puede ocurrir que exista un conjunto abierto $W \supset [0,1]^k$ y un sistema de coordenadas $f : W \to \mathbf{R}^n$ tal que $c(x) = f(x)$ para $x \in [0,1]^k$; un k-cubo en M se entenderá que es siempre de este tipo. Si M es orientada, el k-cubo singular c se dice que **conserva la orientación,** si f la conserva.

5-4. Teorema. *Si $c_1, c_2 : [0,1]^k \to M$ son dos k-cubos singulares que conservan la orientación en la variedad orientada k-dimensional M y ω es una k-forma en M tal que $\omega = 0$ al exterior de $c_1([0,1]^k) \cap c_2([0,1]^k)$, entonces*

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega.$$

Demostración. Se tiene

$$\int_{c_1} \omega = \int_{[0,1]^k} c_1^*(\omega) = \int_{[0,1]^k} (c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega).$$

(Aquí $c_2^{-1} \circ c_1$ está definido sólo en un subconjunto de $[0,1]^k$ y la segunda igualdad depende del hecho que $\omega = 0$ en el exterior de $c_1([0,1]^k) \cap c_2([0,1]^k)$.) Por lo tanto basta probar que

$$\int_{[0,1]^k} (c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega) = \int_{[0,1]^k} c_2^*(\omega) = \int_{c_2} \omega.$$

Si $c_2^*(\omega) = f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$ y $c_2^{-1} \circ c_1$ se designa por g, entonces en virtud del teorema 4-9 se tiene

$$\begin{aligned}(c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega) &= g^*(f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k) \\ &= (f \circ g) \cdot \det g' \cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k \\ &= (f \circ g) \cdot |\det g'| \cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k,\end{aligned}$$

puesto que $\det g' = \det (c_2^{-1} \circ c_1)' > 0$. El resultado es consecuencia ahora del teorema 3-13. ∎

La última ecuación de esta demostración ayuda a explicar por qué se ha procedido con tanto cuidado con las orientaciones.

Sea ω una k-forma en una variedad orientada k-dimensional M. Si existe un k-cubo singular c que conserve la orientación en M tal que $\omega = 0$ en el exterior de $c([0,1]^k)$, se define

$$\int_M \omega = \int_c \omega.$$

El teorema 5-4 demuestra que $\int_M \omega$ no depende de la elección de c. Supóngase ahora que ω es una k-forma arbitraria en M. Existe un recubrimiento abierto $\mathcal{O}$ de M tal que para cada $U \in \mathcal{O}$ existe un k-cubo singular c que conserva la orientación con $U \subset c([0,1])$. Sea Φ una partición de la unidad para M subordinada a este recubrimiento. Se define

$$\int_M \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi \cdot \omega$$

con la condición de que la serie converja (converge ciertamente si M es compacto). Un razonamiento análogo al del teorema 3-12 prueba que $\int_M \omega$ no depende del recubrimiento $\mathcal{O}$ o de Φ.

Todas estas definiciones podían haberse dado para una variedad k-dimensional M con frontera y orientación μ. En ∂M está la orientación inducida $\partial\mu$ Sea c un k-cubo que conserva la orientación en M tal que $c_{(k,0)}$ está en ∂M y es el única cara que tiene todo punto interior en ∂M. Como indica tal nota después de la definición de $\partial\mu$, $c_{(k,0)}$ conserva la orientación si k es par, pero no si k es impar. Así si ω es una $(k-1)$-forma en M que es 0 en el exterior de $c([0,1]^k)$, se tiene

$$\int_{c(k,0)} \omega = (-1)^k \int_{\partial M} \omega.$$

Por otra parte, $c_{(k,0)}$ aparece con coeficiente $(-1)^k$ en ∂c. Por tanto

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{(-1)^k c(k,0)} \omega = (-1)^k \int_{c(k,0)} \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

La eleción de $\partial\mu$ se hizo para eliminar cada signo menos en esta ecuación y en el teorema que sigue.

5-5. Teorema. (Teorema de Stokes.) *Si M es una variedad k-dimensional orientada compacta con frontera y ω es una $(k-1)$-forma en M, entonces*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

(Aquí se da a ∂M la orientación inducida.)

Demostración. Se supone en primer lugar que existe un k-cubo singular que conserva la orientación en $M - \partial M$ tal que $\omega = 0$ en el exterior de $c([0,1]^k)$. En virtud del teorema 4-13 y de la definición de $d\omega$, se tiene

$$\int_c d\omega = \int_{[0,1]^k} c^*(d\omega) = \int_{[0,1]^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Entonces

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = 0,$$

puesto que $\omega = 0$ en ∂c. Por otra parte, $\int_{\partial M} \omega = 0$ puesto que $\omega = 0$ en ∂M.

Supóngase ahora que existe un k-cubo singular en M que conserve la orientación tal que $c_{(k,0)}$ es la única cara en ∂M, y $\omega = 0$ en el exterior de $c([0,1])^k$. Entonces

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Se considera finalmente el caso general. Existe un recubrimiento abierto $\mathcal{O}$ de M y una partición de la unidad Φ para M subordinada a $\mathcal{O}$ tal que para cada $\varphi \in \Phi$ la forma $\varphi \cdot \omega$ sea de una de los dos tipos ya considerados. Se tiene

$$0 = d(1) = d\left(\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi\right) = \sum_{\varphi \in \Phi} d\varphi,$$

de manera que

$$\sum_{\varphi \in \Phi} d\varphi \wedge \omega = 0.$$

Puesto que M es compacto, ésta es una suma finita y se tiene

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_M d\varphi \wedge \omega = 0.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= \sum_{\varphi\in\Phi}\int_M \varphi\cdot d\omega = \sum_{\varphi\in\Phi}\int_M d\varphi\wedge\omega + \varphi\cdot d\omega\\ &= \sum_{\varphi\in\Phi}\int_M d(\varphi\cdot\omega) = \sum_{\varphi\in\Phi}\int_{\partial M}\varphi\cdot\omega\\ &= \int_{\partial M}\omega. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Problemas. **5 - 18.** Si M es una variedad n-dimensional (o variedad con frontera) en $\mathbf{R}^n$, con la orientación usual, probar que $\int_M f\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$, tal como se ha definido en esta sección, es la misma $\int_M f$, que se ha definido en el capítulo 3.

5 - 19. (a) Probar que el teorema 5-5 es falso si M no es compacto. *Indicación:* Si M es una variedad con frontera para la cual se cumple 5-5, entonces $M-\partial M$ es también una variedad con frontera (con frontera vacía).

(b) Probar que el teorema 5-5 se cumple para M no compacto siempre que ω se anule en el exterior de un subconjunto compacto de M.

5 - 20. Si ω es una $(k-1)$-forma en una variedad k-dimensional compacta M, demostrar que $\int_M d\omega = 0$. Dar un contraejemplo si M no es compacta.

5 - 21. Un **k-tensor absoluto** en V es una función $\eta\colon V^k\to\mathbf{R}$ de la forma $|\omega|$ para $\omega\in\Lambda^k(V)$. Una **k-forma absoluta** en M es una función η tal que $\eta(x)$ es un k-tensor absoluto en M_x. Probar que $\int_M\eta$ se puede definir aunque M no sea orientable.

5 - 22. Si $M_1\subset\mathbf{R}^n$ es una variedad con frontera n-dimensional y $M_2\subset M_1-\partial M_1$ es una variedad n-dimensional con frontera, y M_1, M_2 son compactos, probar que

$$\int_{\partial M_1}\omega = \int_{\partial M_2}\omega,$$

donde ω es una $(n-1)$-forma en M_1 y ∂M_1 y ∂M_2 tienen las orientaciones inducidas por las orientaciones usuales de M_1 y M_2. *Indicación:* Encontrar una variedad con frontera M tal que $\partial M=\partial M_1\cup\partial M_2$ y tal que la orientación inducida en ∂M coincida con la de ∂M_1 en ∂M_1 y es la negativa de la de ∂M_2 en ∂M_2.

EL ELEMENTO DE VOLUMEN

Sea M una variedad k-dimensional (o variedad con frontera) en $\mathbf{R}^n$ con una orientación μ. Si $x\in M$, entonces μ_x y el producto interior T_x que se definió anteriormente determinan un elemento de volumen $\omega(x)\in\Lambda^k(M_x)$. Se obtiene por tanto una k-forma ω en M, no nula en ningún punto, que se denomina **elemento de volumen** en M (determinado por μ) y que se indica por dV, a pesar de no ser en general la diferencia de una $(k-1)$-forma. El **volumen** de M se define como $\int_M dV$, siempre que esta integral exista, lo que ocurre siempre que M sea compacto. «Volumen» se acostumbra a llamar **longitud** o **área** para variedades de

una y dos dimensiones, y dV se designa por ds («elemento de longitud») o por dA (o dS) («elemento de área» (superficie)).

Un caso concreto de interés particular es el elemento de volumen de una superficie orientada (variedad bidimensional) M en $\mathbf{R}^3$. Sea $n(x)$ la normal exterior unitaria en $x \in M$. Si $\omega \in \Lambda^2(M_x)$ está definida por

$$\omega(v,w) = \det\begin{pmatrix} v \\ w \\ n(x) \end{pmatrix},$$

entonces, $\omega(v,w) = 1$ si v y w forman una base ortonormal de M_x con $[v,w] = \mu_x$. Entonces, $dA = \omega$. Por otra parte, $\omega(v,w) = \langle v \times w, n(x)\rangle$ por la definición de $v \times w$. Por tanto, se tiene

$$dA(v,w) = \langle v \times w, n(x)\rangle.$$

Puesto que $v \times w$ es un múltiplo de $n(x)$ para $v,w \in M_x$ se concluye que

$$dA(v,w) = |v \times w|$$

si $[v,w] = \mu_x$. Si se desea calcular el área de M, se ha de hallar $\int_{[0,1]^2} c^*(dA)$ para un 2-cubo singular c que conserve la orientación. Se tiene

$$\begin{aligned} E(a) &= [D_1c^1(a)]^2 + [D_1c^2(a)]^2 + [D_1c^3(a)]^2, \\ F(a) &= D_1c^1(a) \cdot D_2c^1(a) \\ &\qquad + D_1c^2(a) \cdot D_2c^2(a) \\ &\qquad\qquad + D_1c^3(a) \cdot D_2c^3(a), \\ G(a) &= [D_2c^1(a)]^2 + [D_2c^2(a)]^2 + [D_2c^3(a)]^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} c^*(dA)((e_1)_a,(e_2)_a) &= dA(c_*((e_1)_a),c_*((e_2)_a)) \\ &= |(D_1c^1(a),D_1c^2(a),D_1c^3(a)) \times (D_2c^1(a),D_2c^2(a),D_2c^3(a))| \\ &= \sqrt{E(a)G(a) - F(a)^2} \end{aligned}$$

en virtud del problema 4-9. Por tanto

$$\int_{[0,1]^2} c^*(dA) = \int_{[0,1]^2} \sqrt{EG - F^2}.$$

Calcular áreas de superficies es evidentemente una empresa temeraria; afortunadamente rara vez se necesita conocer el área de una superficie. Por otra parte, existe una expresión simple para dA que es suficiente para las consideraciones teóricas.

5-6. Teorema. *Sea M una variedad bidimensional orientada compacta (o variedad con frontera) en $\mathbf{R}^3$ y sea n el vector normal exterior unitario. Entonces*

$$(1) \qquad dA = n^1\,dy \wedge dz + n^2\,dz \wedge dx + n^3\,dx \wedge dy.$$

Además

$$(2) \qquad n^1\,dA = dy \wedge dz.$$
$$(3) \qquad n^2\,dA = dz \wedge dx.$$
$$(4) \qquad n^3\,dA = dx \wedge dy.$$

Demostración.

La igualdad (1) es equivalente a la

$$dA(v,w) = \det\begin{pmatrix} v \\ w \\ n(x) \end{pmatrix}$$

Lo que se comprueba desarrollando el determinante por menores según la última fila. Para probar las otras igualdades, sea $z \in M_x$. Puesto que $v \times w = \alpha n(x)$ para un $\alpha \in \mathbf{R}$, se tiene

$$\langle z,n(x)\rangle \cdot \langle v \times w,\, n(x)\rangle = \langle z,n(x)\rangle\alpha = \langle z,\alpha n(x)\rangle = \langle z,v \times w\rangle.$$

Eligiendo $z = e_1$, e_2 y e_3, se obtiene (2), (3) y (4).

Una llamada de atención: si $\omega \in \Lambda^2(\mathbf{R}^3_a)$ está definida por

$$\omega = n^1(a) \cdot dy(a) \wedge dz(a) + n^2(a) \cdot dz(a) \wedge dx(a) + n^3(a) \cdot dx(a) \wedge dy(a),$$

no es cierto, por ejemplo, que

$$n^1(a) \cdot \omega = dy(a) \wedge dz(a).$$

Los dos miembros sólo dan el mismo resultado si se aplican a $v,w \in M_a$.

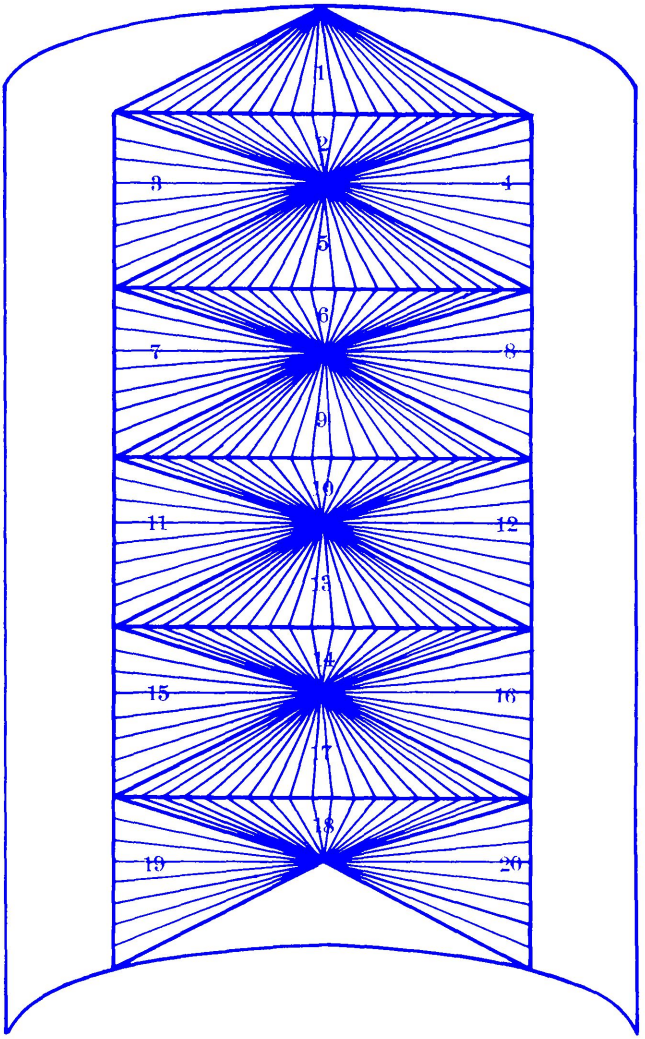


FIGURA 5-9

Una superficie formada por 20 triángulos inscrita en una porción de un cilindro. Si el número de triángulos crece suficientemente, haciendo las bases de los triángulos 3, 4, 7, 8, etc. suficientemente pequeñas, el área total de la superficie inscrita se puede hacer tan grande como se quiera.

Son necesarias algunas observaciones para justificar las definiciones de longitud y área que se han dado. Si $c : [0,1] \to \mathbf{R}^n$ es diferenciable y $c([0,1])$ es una variedad unidimensional con frontera, se puede demostrar, pero la demostración es enredada, que la longitud de $c([0,1])$ es efectivamente el extremo superior de las longitudes de las poligonales inscritas. Si c: $[0,1]^2 \to \mathbf{R}^n$, es natural esperar que el área de $c([0,1]^2)$ sea el extremo superior de las áreas de las superficies formadas por triángulos cuyos vértices pertenezcan a $c([0,1]^2)$. Aunque parezca raro, muchas veces no existe este extremo superior —se pueden encontrar superficies poligonales inscritas arbitrariamente próximas a $c([0,1]^2)$ con áreas tan grandes como se quiera. En la Fig. 5-9 se pone de manifiesto esto para un cilindro. Se han propuesto muchas definiciones para el área de una superficie que no coinciden entre sí, pero que todas coinciden con la definición dada aquí para superficies diferenciables. Para una discusión de esta difícil cuestión se remite al lector a las referencias [3] o [15].

Problemas. **5-23.** Si M es una variedad orientada unidimensional $\mathbf{R}^n$ y c: $[0,1] \to M$ conserva la orientación, probar que

$$\int_{[0,1]} c^*(ds) = \int_{[0,1]} \sqrt{[(c^1)']^2 + \cdots + [(c^n)']^2}.$$

5-24. Si M es una variedad n-dimensional en $\mathbf{R}^n$, con la orientación usual, probar que $dV = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, o sea el volumen de M, tal como se ha definido en esta sección, es el volumen definido en el capítulo 3. (Obsérvese que esto depende del factor numérico en la definición de $\omega \wedge \eta$.)

5-25. Generalizar el teorema 5-6 al caso de una variedad $(n-1)$-dimensional orientada en $\mathbf{R}^n$.

5-26. (a) Si f: $[a,b] \to \mathbf{R}$ es no negativa y la gráfica de f en el plano xy se hace girar alrededor del eje x en $\mathbf{R}^3$ engendrando una superficie M, probar que el área de M es

$$\int_a^b 2\pi f \sqrt{1 + (f')^2}.$$

(b) Calcular el área de S^2.

5-27. Si T: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ es una transformación lineal que conserva la norma y M es una variedad k-dimensional en $\mathbf{R}^n$, probar que M tiene el mismo volumen que $T(M)$.

5-28. (a) Si M es una variedad k-dimensional, probar que se puede definir un k-tensor absoluto $|dV|$, aun en el caso de ser M no orientable, de manera que el volumen de M se puede definir por $\int_M |dV|$.

(b) Si c: $[0,2\pi] \times (-1,1) \to \mathbf{R}^3$ está definido por $c(u,v) =$

$$(2\cos u + v \operatorname{sen}(u/2)\cos u,\ 2\operatorname{sen} u + v \operatorname{sen}(u/2)\operatorname{sen} u,\ v\cos u/2),$$

probar que $c([0,2\pi] \times (-1,1))$ es una banda de Möbius y hallar su área.

5-29. Si existe una k-forma que no se anula en ningún punto en una variedad k-dimensional M, probar que M es orientable.

5 - 30. (a) Si f: $[0,1] \to \mathbf{R}$ es diferenciable y c: $[0,1] \to \mathbf{R}^2$ está definida por $c(x) = (x,f(x))$, probar que $c([0,1])$ tiene longitud $\int_0^1 \sqrt{1 + (f')^2}$.

(b) Probar que esta longitud es el extremo superior de las longitudes de las poligonales inscritas. *Indicación:* Si $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = 1$, entonces

$$\begin{aligned} |c(t_i) - c(t_{i-1})| &= \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2} \\ &= \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + f'(s_i)^2(t_i - t_{i-1})^2} \end{aligned}$$

para un cierto $s_i \in [t_{i-1},t_i]$.

5 - 31. Se considera la 2-forma ω definida en $\mathbf{R}^3 - 0$ por

$$\omega = \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(a) Probar que ω es cerrada.

(b) Probar que

$$\omega(p)(v_p,w_p) = \frac{\langle v \times w, p\rangle}{|p|^3}.$$

Para $r > 0$ sea $S^2(r) = \{x \in \mathbf{R}^3\colon |x| = r\}$. Probar que ω restringida al espacio tangente de $S^2(r)$ es $1/r^2$ veces el elemento de volumen y que $\int_{S^2(r)} \omega = 4\pi$. Concluir que ω no es exacta. No obstante se indica ω por $d\Theta$ puesto que, como se verá, $d\Theta$ es la análoga de la 1-forma $d\theta$ en $\mathbf{R}^2 - 0$.

(c) Si v_p es un vector tangente tal que $v = \lambda p$ para un $\lambda \in \mathbf{R}$, probar que $d\Theta(p)(v_p,w_p) = 0$ para todo w_p. Si una variedad bidimensional M en $\mathbf{R}^3$ es parte de un cono generalizado, es decir, si M es un conjunto unión de segmentos de semirrectas que parten del origen, probar que $\int_M d\Theta = 0$.

(d) Sea $M \subset \mathbf{R}^3 - 0$ una variedad bidimensional compacta con frontera tal que cada semirrecta a partir del origen corte a M a lo sumo una vez. (Fig. 5-10). El conjunto unión de estas semirrectas que parten del origen y que cortan a M es un cono sólido $C(M)$. El ángulo sólido determinado por M se define como el área de $C(M) \cap S^2$, o lo que es equivalente como $1/r^2$ veces el área de $C(M) \cap S^2(r)$ para $r > 0$. Probar que el ángulo sólido determinado por M es $|\int_M d\Theta|$. *Indicación:* Elegir r suficientemente pequeño para que exista una variedad tridimensional N con frontera (como en la Fig. 5-10) tal que ∂N sea la unión de M y $C(M) \cap S^2(r)$, y una parte de un cono generalizado. (Se tratará, en efecto, de una variedad N con esquinas; ver las observaciones del final de la próxima sección.)

5 - 32. Sean f,g: $[0,1] \to \mathbf{R}^3$ curvas cerradas no secantes. Se define el número de encadenamiento $l(f,g)$ de f y g por (compárese con problema 4-34)

$$l(f,g) = \frac{-1}{4\pi} \int_{c_{f,g}} d\Theta.$$

(a) Probar que si (F,G) es una homotopía de curvas cerradas no secantes, entonces $l(F_0,G_0) = l(F_1,G_1)$.

(b) Si $r(u,v) = |f(u) - g(v)|$ probar que

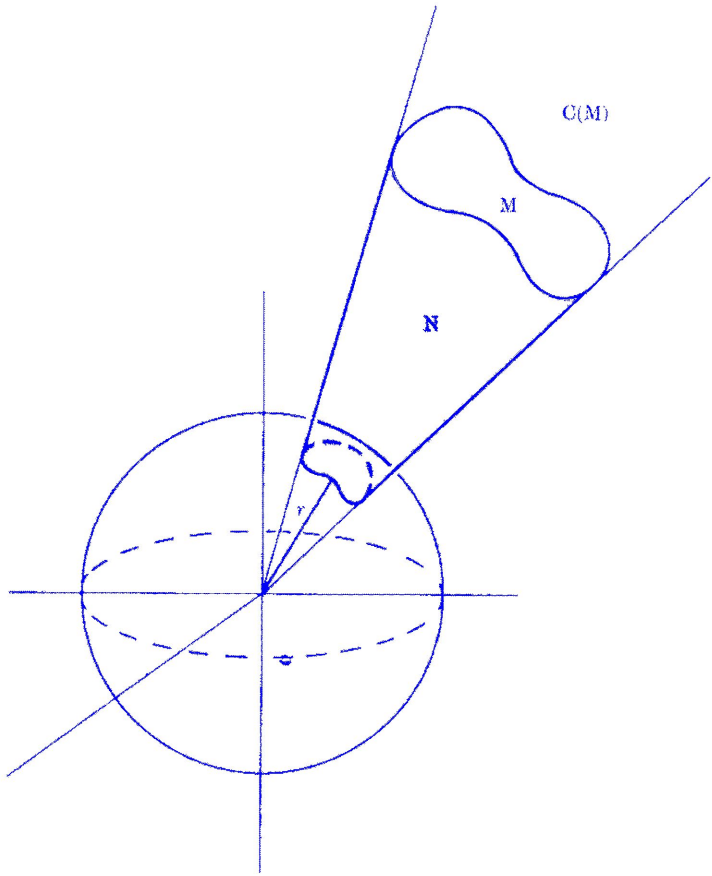


FIGURA 5-10

$$l(f,g) = \frac{-1}{4\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{[r(u,v)]^3} \cdot A(u,v)\, du\, dv$$

donde

$$A(u,v) = \det \begin{pmatrix} (f^1)'(u) & (f^2)'(u) & (f^3)'(u) \\ (g^1)'(v) & (g^2)'(v) & (g^3)'(v) \\ f^1(u) - g^1(v) & f^2(u) - g^2(v) & f^3(u) - g^3(v) \end{pmatrix}.$$

(c) Probar que $l(f,g) = 0$ si f y g están ambas en el plano xy. Las curvas de la

Fig. 4-6 (b) están dadas por $f(u) = \cos u, \text{ sen } u, 0)$ y $g(v) = (1 + \cos v, 0, \text{ sen } v)$. Se puede llegar fácilmente al convencimiento que calcular $l(f,g)$ por medio de la integral anterior es en este caso prácticamente imposible. El problema que sigue presenta la manera de hallar $l(f,g)$ sin cálculos explícitos.

5 - 33. (a) Si $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ se define

$$d\Theta_{(a,b,c)} = \frac{(x-a)dy \wedge dz + (y-b)dz \wedge dx + (z-c)dx \wedge dy}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Si M es una variedad bidimensional compacta con frontera en $\mathbf{R}^3$ y $(a,b,c) \notin M$, se define

$$\Omega(a,b,c) = \int_M d\Theta_{(a,b,c)}.$$

Sea (a,b,c) un punto en el mismo lado de M que la normal exterior y (a',b',c') un punto en el lado opuesto. Probar que eligiendo (a,b,c) suficientemente próximo a (a',b',c') se puede hacer $\Omega(a,b,c) - \Omega(a',b',c')$ tan próximo a -4π como se desee. *Indicación:* Primero, probar que si $M = \partial N$ entonces $\Omega(a,b,c) = -4\pi$ para $(a,b,c) \in N - M$ y $\Omega(a,b,c) = 0$ para $(a,b,c) \notin N$.

(b) Supóngase $f([0,1]) = \partial M$ para una cierta variedad bidimensional orientada compacta M con frontera. (Si f no se corta a sí misma, una M de este tipo existe siempre, aun cuando f tenga nudos, ver [6], página 138.) Se supone que siempre que g corta M en x el vector tangente v de g no está en M_x. Sea n^+ el número de intersecciones en las que v tiene la misma dirección que la normal exterior y n^- el número de las otras intersecciones. Si $n = n^+ - n^-$ probar que

$$n = \frac{-1}{4\pi} \int_g d\Omega.$$

(c) Probar que

$$D_1\Omega(a,b,c) = \int_f \frac{(y-b)dz - (z-c)dy}{r^3}$$

$$D_2\Omega(a,b,c) = \int_f \frac{(z-c)dx - (x-a)dz}{r^3}$$

$$D_3\Omega(a,b,c) = \int_f \frac{(x-a)dy - (y-b)dx}{r^3},$$

donde $r(x,y,z) = |(x,y,z)|$.

(d) Probar que el entero n de (b) es igual a la integral del problema 5-32(b), y utilizar este resultado para probar que $l(f,g) = 1$ si f y g son las curvas de la Figura 4-6 (b), mientras que $l(f,g) = 0$ si f y g son las curvas de la Figura 4-6 (c). (Estos resultados eran conocidos de Gauss [7]. Las demostraciones perfiladas aquí son de [4] pp. 409-411; ver también [13], Volumen 2, pp. 41-43.)

LOS TEOREMAS CLÁSICOS

Se tiene ahora preparado todo el instrumental necesario para establecer y demostrar los teoremas clásicos «tipo Stokes». Se utilizará parcialmente en esta exposición la notación clásica.

5-7. Teorema. (Teorema de Green.) *Sea* $M \subset \mathbf{R}^2$ *una variedad bidimensional compacta con frontera. Supóngase que* α,β: $M \to \mathbf{R}$ *son diferenciables. Entonces*

$$\int_{\partial M} \alpha\, dx + \beta\, dy = \int_M (D_1\beta - D_2\alpha) dx \wedge dy$$
$$= \iint_M \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

(Aquí M tiene la orientación usual, y ∂M la orientación inducida, también conocida como la orientación contraria a la de las agujas del reloj.)

Demostración. Éste es un caso muy particular del teorema 5-5, puesto que

$$d(\alpha\, dx + \beta\, dy) = (D_1\beta - D_2\alpha) dx \wedge dy. \quad \blacksquare$$

5-8. Teorema. (Teorema de la divergencia.) *Sea* $M \subset \mathbf{R}^3$ *una variedad tridimensional compacta con frontera y* n *la normal exterior unitaria en* ∂M. *Sea* F *un campo vectorial diferenciable en* M. *Entonces*

$$\int_M \operatorname{div} F\, dV = \int_{\partial M} \langle F, n\rangle\, dA.$$

Esta ecuación se escribe también mediante tres funciones diferenciables $\alpha,\beta,\gamma : M \to \mathbf{R}$:

$$\iiint_M \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) dV = \iint_{\partial M} (n^1\alpha + n^2\beta + n^3\gamma)\, dS.$$

Demostración. Se define ω en M por $\omega = F^1\, dy \wedge dz + F^2\, dz \wedge dx + F^3\, dx \wedge dy$. Entonces, $d\omega = \operatorname{div} F\, dV$. Según el teorema 5-6, en ∂M, se tiene

$$n^1\, dA = dy \wedge dz,$$
$$n^2\, dA = dz \wedge dx,$$
$$n^3\, dA = dx \wedge dy.$$

Por tanto en ∂M se tiene

$$\begin{aligned}\langle F,n\rangle\, dA &= F^1 n^1\, dA + F^2 n^2\, dA + F^3 n^3\, dA \\ &= F^1\, dy \wedge dz + F^2\, dz \wedge dx + F^3\, dx \wedge dy \\ &= \omega.\end{aligned}$$

Así, en virtud del teorema 5-5, resulta

$$\int_M \operatorname{div} F\, dV = \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \langle F, n\rangle\, dA. \quad \blacksquare$$

5-9. Teorema. (Teorema de Stokes.) *Sea $M \subset \mathbf{R}^3$ una variedad bidimensional, orientada compacta con frontera y n la normal unitaria exterior en M determinada por la orientación de M. ∂M tiene la orientación inducida. Sea T el campo vectorial en ∂M con $ds(T) = 1$ y sea F un campo vectorial diferenciable en un conjunto abierto que contiene a M. Entonces*

$$\int_M \langle (\nabla \times F), n\rangle\, dA = \int_{\partial M} \langle F,T\rangle\, ds.$$

Esta fórmula se escribe algunas veces

$$\int_{\partial M} \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = \iint_M \left[n^1 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) + n^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) + n^3 \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)\right] dS.$$

Demostración. Se define ω en M por $\omega = F^1\, dx + F^2\, dy + F^3\, dz$. Puesto que $\nabla \times F$ tiene componentes $D_2F^3 - D_3F^2$, $D_3F^1 - D_1F^3$, $D_1F^2 - D_2F^1$, se sigue, como en la demostración del teorema 5-8, que en M se tiene

$$\begin{aligned}\langle (\nabla \times F), n\rangle\, dA &= (D_2F^3 - D_3F^2) dy \wedge dz \\ &\quad + (D_3F^1 - D_1F^3) dz \wedge dx \\ &\quad + (D_1F^2 - D_2F^1) dx \wedge dy \\ &= d\omega.\end{aligned}$$

Por otra parte, puesto que $ds(T) = 1$, en ∂M se tiene

$$\begin{aligned}T^1\, ds &= dx, \\ T^2\, ds &= dy, \\ T^3\, ds &= dz.\end{aligned}$$

(Estas igualdades pueden ser comprobadas aplicando ambos miembros a T_x para $x \in \partial M$, puesto que T_x es una base para $(\partial M)_x$.)

Por tanto, en ∂M es

$$\begin{aligned}\langle F,T\rangle\, ds &= F^1T^1\, ds + F^2T^2\, ds + F^3T^3\, ds \\ &= F^1\, dx + F^2\, dy + F^3\, dz \\ &= \omega.\end{aligned}$$

Así, en virtud del teorema 5-5, resulta

$$\int_M \langle(\nabla \times F),n\rangle\, dA = \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \langle F,T\rangle\, ds. \quad \blacksquare$$

Los teoremas 5-8 y 5-9 son las bases para los nombres de div F y rot F. Si $F(x)$ es el vector velocidad de un fluido en x (en un instante) entonces $\int_M \langle F,n\rangle\, dA$ es la cantidad de fluido que «diverge» a partir de M. En consecuencia la condición div $F = 0$ expresa el hecho que el fluido es incompresible. Si M es un disco, entonces $\int_M \langle F,T\rangle\, ds$ mide la cantidad de fluido que circula alrededor del centro de este disco. Si es cero para todo el disco, entonces $\nabla \times F = 0$ y el fluido se denomina *irrotacional*.

Estas interpretaciones de div F y rot F son debidas a Maxwell [13]. Maxwell realmente trabajó con el opuesto de div F, que de conformidad con la consideración anterior, llamó la *convergencia*. Para $\nabla \times F$ Maxwell propuso «con gran timidez» el término *rotación de F*; este término desafortunado sugiere la abreviatura rot F que todavía se emplea y se lee *rotacional* (los autores de habla inglesa emplean frecuentemente la palabra «curl»).

Los teoremas clásicos de esta sección se suelen establecer con mayor generalidad que la que se ha dado aquí. Por ejemplo, el teorema de Green es cierto para un cuadrado, y el teorema de la divergencia es cierto para un cubo. Estos dos hechos particulares pueden demostrarse aproximando el cuadrado o el cubo por variedades con frontera. Una generalización completa de los teoremas de esta sección requiere el concepto de variedades con aristas; éstas son subconjuntos de $\mathbf{R}^n$ que son, salvo difhomomorfismos, localmente porciónes de $\mathbf{R}^k$ que están acotadas por trozos de $(k-1)$-planos. El lector ambicioso encontrará un estimulante ejercicio en buscar definiciones para variedades con aristas, que sean rigurosas y en investigar los resultados de este capítulo que pueden ser generalizados.

Problemas. **5 - 34.** Generalizar el teorema de divergencia al caso de una n-variedad con frontera en $\mathbf{R}^n$.

5 - 35. Aplicando el teorema de la divergencia generalizado al conjunto $M = \{x \in \mathbf{R}^n$:

$|x| \leq a\}$ y $F(x) = x_x$ hallar el volumen de $\mathbf{S}^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n: |x| = 1\}$ por medio del volumen n-dimensional de $B_n = \{x \in \mathbf{R}^n: |x| \leq 1\}$. (Este volumen es $\pi^{n/2}/(n/2)!$ si n es par y $2^{(n+1)/2}\pi^{(n-1)/2}/1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ si n es impar.)

5 - 36. Se define F en $\mathbf{R}^3$ por $F(x) = (0,0,cx^3)_x$ y sea M una variedad tridimensional compacta con frontera tal que $M \subset \{x: x^3 \leq 0\}$. El campo vectorial F se puede suponer que es la presión hacia el fondo de un fluido de densidad c en $\{x: x^3 \leq 0\}$. Puesto que un fluido ejerce igual presión en todas direcciones, se define el empuje en M ejercido por el fluido, por $-\int_{\partial M}(F,n)dA$. Probar el siguiente teorema. *Teorema de Arquímedes.* El empuje en M es igual al peso de fluido desalojado por M.

Bibliografía

1. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, Nueva York, 1953.
2. Auslander y MacKenzie, *Introduction to Differentiable Manifolds*, McGraw-Hill, Nueva York, 1963.
3. Cesari, *Surface Area*, Princeton University Press, Princeton, Nueva Jersey, 1956.
4. Courant, *Differential and Integral Calculus*, Volumen II, Interscience, Nueva York, 1937.
5. Dieudonné, *Fundamentos de Análisis Moderno*, Editorial Reverté, S. A., Barcelona, 1966.
6. Fort, *Topology of 3-Manifolds*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1962.
7. Gauss, *Zur mathematischen Theorie der electrodynamischen Wirkungen*, [4] (Póstuma) Obras V, 605.
8. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, Nueva York, 1962.
9. Hilton y Wylie, *Homology Theory*, Cambridge University Press, Nueva York, 1960.
10. Hu, *Homotopy Theory*, Academic Press, Nueva York, 1959.
11. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, Nueva Jersey, 1955.
12. Kobayashi y Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience, Nueva York, 1963.
13. Maxwell, *Electricity and Magnetism*, Dover, Nueva York, 1954.
14. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable*, Frederick Ungar, Nueva York, 1955.
15. Radó, *Length and Area*, Volumen XXX, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Nueva York, 1948.
16. De Rham, *Variétés Differentiables*, Hermann, París, 1955.
17. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1964.

Índice alfabético

Absoluta, forma diferencial, 116
Álgebra, teorema fundamental de, 97
Alternado, tensor, 72
Analítica, función, 97
Ángulo, 4
  conservación, 4
  sólido, 121
Aproximación, 13
Área, 51
  elementos de un, 116
  de superficie, 118
  para variedades, 116, 117
Arquímedes, teorema de, 127
Auto-adjunta, 79

Base ortonormal, 71
  usual para $\mathbf{R}^n$, 3

Cadena, 90, 94
  frontera de una, 90-91
Cálculo, teorema fundamental del, 93-96
Cambio de variables, 62-68
Campo, *véase* Campo vectorial
Campo vectorial, 107
  continuo, 79
Caras de un cubo singular, 91
Característica, función, 51
Cauchy, fórmula integral de, 98
  teorema integral de, 98
Cauchy-Riemann, ecuaciones de, 97
Cavalieri, principio de, 58
C^∞, 25
Compacto, 6
Complejas variables, 97
Complejos, números, 97
Componente, función, 10, 79
Composición, 10
Conjunto, exterior de un, 6
  frontera de un, 6
  interior de un, 6
Conjuntos cerrados, 5
  abiertos, 5
Cono generalizado, 121
Consistentes, elecciones de orientación, 108
Constante, función, 18
Contenido, 47, 51
  cero, 46
Continua, función, 10
Coordenadas polares, 68
    sistema de, 68
  sistema de, 103
Cubo singular, 89
  cara de un, 91
  degenerado, 97
  n, 89
  típico, 90
    n, 90
Curva, 89
  cerrada, 98
  diferenciable, 89

Definitiva positiva, 2, 71
Derivada, 14
  direccional, 31
  parcial, 23
    de orden superior (mixta), 24
    de segundo orden (mixta), 24
    segunda (mixta), 24

Desigualdad, *véase* Desigualdad triangular
Desigualdad triangular, 4
Diferenciable $= C^\infty$, 81
  con continuidad, función, 29
  continua, forma, 81
  curva, 89
  diferencial, forma, 81
  en variedades, 106
  función, 13, 14, 97
Diferencial, 84
  continua, forma, 81
  forma, 81
    cerrada, 85
    diferenciable, 107
    exacta, 85
Difhomomorfismo, 101
Dimensional, variedad con frontera, 105
Direccional, derivada, 31
Distancia, 4
Divergencia de un campo, 81, 126
  teorema de la, 124
Dominio, 10
Dual, espacio, 5

Elemento de volumen, 77, 116
Empuje, 127
Esfera, 101
Espacio, 1
    véase también, Espacio dual, Espacio euclídeo, Semi-espacio, Espacio tangente
  dual, 5
  euclídeo, 1
  tangente, 79, 106
Estrella, forma de, 86
Euclídeo, espacio, 1
Exterior, unidad normal, 110

Forma absoluta diferencial, 116
  cerrada, diferencial, 85
  de estrella, 86
  diferencial, 81
  exacta, diferencial, 85
Fuido incompresible, 126
  irrotacional, 126
Forma, *véase* Forma diferencial
Frontera de una cadena, 90-91
  dimensional, variedad con, 105
Fubini, teorema de, 54
Función, 10
  analítica, 97
  bilineal, 2, 22
  C^∞, 25
  característica, 51
  componente, 10, 79
  composición de una, 10
Función constante, 18
  continua, 10
  de n variables, 10
  diferenciable, 13, 14, 97
    con continuidad, 29
  homogénea, 32
  idéntica, 10
  implícita, definición, 38-39
    teorema, 39
  independiente de la primera variable, 16
    de la segunda variable, 16
  integrable, 44
  integral, 44
  inversa, 10, 32, 37
    teorema, 33
  multilineal, 22, 69
  proyección, 10
  uno-uno (1-1), 10
  valores vectoriales, 10
Funciones iguales hasta el orden n, 16

Gauss, 123
Grad f, 89
Gráfica, 10, 106
Green, teorema de, 124

Heine-Borel, teorema, 7
Homogénea, función, 32
Homotopía, 98

Idéntica, función, 10
Incompresible, fluido, 126
Independencia de parámetros, 96
Inducida, orientación, 110
Inferior, integral, 54
Integrable, 44
Integral, 44
  de forma sobre una cadena, 94
  de línea, 94
  de superficie, 94
  fórmula de Cauchy de la, 98
  inferior, 54
  iterada, 54, 55
  sobre conjuntos, 51
    abiertos, 60
    rectángulos, 51
  superior, 54
  teorema de Cauchy de la, 98
Inversa, función, 10, 32, 37
Irrotacional, fluido, 126
Iterada, integral, 54, 55

Jacobiana, matriz, 15

Kelvin, 68

Lagrange, método de, 112
  multiplicador de, 112
Leibnitz, regla de, 57
Límite, 10
Línea, 1
  integral de, 94
Liouville, 68
Longitud, 51, 116
  elementos de, 116
  = norma, 1

Matemático (viejo estilo), 68
Matriz, 1
  jacobiana, 15
  transpuesta, 22, 76
Máximos, 25-26
Multiplicador, *véase* Lagrange, multiplicador de
Medible-Jordán, 51
Medida cero, 46
Mínimos, 25-26
Möbius, banda de, 110, 120

Norma, 1
  conservación de la, 4
Normal, *véase* Unidad normal exterior
Notación, 3, 41, 82
Números complejos, 97

Orientación, 76, 110
  conservación de la, 109, 113
  consistente, elección de, 108
  contraria a las agujas del reloj, 124
  inducida, 110
  usual, 76, 79, 111
  variedades de, 110
Ortogonal, vector, 5
Oscilación, 11

Parámetros, independencia de, 96
Parcial, derivada, 23
  segunda (mixta), 24
Partición, 43
  de la unidad, 58
  de un intervalo cerrado, 43
  de un rectángulo cerrado, 43
  fina, 44
Permutación, signo de una, 72
Perpendicular, 5
Plano, 1
Poincaré, lema de, 86
Polarización, identidad de, 3
Producto, *véase*, Producto vectorial, Producto interior, Producto tensor, Producto exterior
Producto exterior, 73
  interior, 2, 71
    conservación, 4
    usual, 71, 79
  tensorial, 69
  vectorial, 77
Proyección, función, 10
Punto, 1
  extremo, 79

Rectángulo abierto, 5
  cerrado, 5
Recubrimiento, 6
  abierto, 6
Regla de la cadena, 17, 30
Restricciones, 112
Rotación de F, 126
Rotacional, 81, 126

Sard, teorema de, 66
Semi-espacio, 105
Simetría, 2, 71
Sólido, ángulo, 121
Stokes, teorema de, 94, 113, 125
Subordenada, 58
Subrectángulos de la partición, 43
Suma inferior, 43
  superior, 43
Superficie, 118
  integral de, 94
Superior, integral, 54

Tangente, vector, 88
Tensor, 69
  absoluto, 116
  alternado, 72
Teorema fundamental de álgebra, 97
Toro, 106
Transpuesta, matriz, 22, 76

Una sola cara, 110
Unidad normal exterior, 110
Usual, *véase* Bases, Producto interior, Orientación

Valor absoluto, 1
Variable, independiente de la segunda, 16
Variables, cambio de, 62-68
  complejas, 97
Variedad con esquinas, 121, 126
  con frontera, 105
  diferenciable, 106
  dimensional, 101, 106
    con frontera, 105
  orientable, 110
Variedades, 101

Variedades campos en, 106
en un vector, 106
diferenciable, 106
forma diferencial en las, 107
formas en, 106
Vector, 1
continuo, 79
diferenciable, 79
Vector ortogonal, 5
tangente, 88
unidad, 110
variedades continuas en un, 79
en un, 106
Volumen, 43, 51, 116
elemento de, 77, 116
Vueltas, número de, 96